

Theoretische Physik I (Mechanik)

— Skriptum zur Vorlesung —

Prof. Dr. Haye Hinrichsen

Institut für Theoretische Physik III
Fakultät für Physik und Astronomie
Universität Würzburg

Skript erstellt von Sebastian Goll und Thorsten Klameth.

Vorwort

Dieses Skript umfasst in komprimierter Form die wesentlichen Inhalte der Vorlesung „Theoretische Mechanik“, die ich im Sommersemester 2005 an der Universität Würzburg gehalten habe. In dieser Vorlesung habe ich den Versuch unternommen, den traditionellen Kanon der klassischen Mechanik erstmals so zu strukturieren, dass von Beginn an die relativistische Physik gleichberechtigt neben der nichtrelativistischen Mechanik vermittelt wird. Ebenso wird die zentrale Rolle des Prinzips der kleinsten Wirkung sowie allgemeiner Symmetrieprinzipien hervorgehoben. Ein weiterer Schwerpunkt ist die Heranführung des Lesers an darstellungsfreie algebraische Lösungsmethoden. Die Vorlesung ist für Studierende im zweiten Fachsemester konzipiert.

Die vorliegende Mitschrift basiert zu großen Teilen auf einem bereits existierenden Skriptum von Prof. Böhm und ist als Ergänzung zu diesem Skript gedacht. Die Kapitel „Kleine Schwingungen“ und „Starrer Körper“ sind nicht enthalten und müssen zur Prüfungsvorbereitung anhand des Böhm-Skripts oder anderen Lehrbüchern nachgearbeitet werden.

Mein besonderer Dank gilt Sebastian Goll und Thorsten Klameth, die in professioneller Weise dieses Skript konzipiert und angefertigt haben.

H. Hinrichsen
Würzburg, Juli 2005

Inhaltsverzeichnis

1. Grundbegriffe der Mechanik	1
1.1. Zeit und Raum	1
1.1.1. Zeit	1
1.1.2. Raum	2
1.2. Verbindung von Raum und Zeit (Newton)	7
1.2.1. Erstes Newtonsches Axiom	7
1.3. Relativistische Raumzeit	8
1.3.1. Zusammenfassung	12
1.4. Geometrische Effekte in der relativistischen Raumzeit	12
1.4.1. Längenkontraktion eines bewegten Stabes	13
1.4.2. Zeitdilatation einer bewegten Uhr	13
1.5. Der Minkowski-Raum	14
1.6. Zusammenfassung	15
2. Kinematik von Massenpunkten	16
2.1. Massenpunkte	16
2.1.1. Bahnen	16
2.2. Prinzip der kleinsten Wirkung	18
2.2.1. Wirkung eines Massepunktes	18
2.3. Freies nichtrelativistisches Teilchen	18
2.3.1. Bahnvariation	20
2.3.2. Energieerhaltung	22
2.4. Freies relativistisches Teilchen	23
2.4.1. Photonen bzw. Strahlungsteilchen	27
3. Kräfte	28
3.1. Die Newtonschen Axiome	28
3.2. Arbeit, Energie und Leistung	29
3.2.1. Arbeit	29
3.2.2. Energie	30
3.2.3. Leistung	30
3.3. Konservative Kräfte	30
3.3.1. Wegunabhängigkeit — Potential	31
3.3.2. Differentielle Formulierung	32
3.3.3. Rotation allgemein	33

3.3.4.	Kräfte in der relativistischen Mechanik	34
3.4.	Potential und Prinzip der kleinsten Wirkung	34
3.4.1.	Variationsrechnung mit Ortsabhängigkeit	35
3.4.2.	Überprüfung von $\mathcal{L} = T - V$	36
3.5.	Eindimensionale Bewegungen	36
3.6.	Geschwindigkeitsabhängige Kräfte	38
3.7.	Drehimpuls eines Teilchens	38
4.	Mehrteilchensysteme	40
4.1.	Drehimpuls	42
4.2.	Zerlegung des Gesamtdrehimpulses	42
4.2.1.	Energieerhaltung	44
4.2.2.	Zerlegung der kinetischen Energie	45
4.3.	Zweikörperproblem mit Zentralkräften	45
4.3.1.	Zweikörperproblem im Lagrange-Formalismus	46
4.3.2.	Energieerhaltung	48
4.3.3.	Lösung der Bewegungsgleichung	49
4.4.	Streuung	52
4.4.1.	Wirkungsquerschnitt	53
4.4.2.	Totaler Wirkungsquerschnitt	54
4.4.3.	Rutherford-Streuung $V(r) = +\frac{k}{r}$	56
5.	Beschleunigte Bezugssysteme	59
5.1.	Rotierende Bezugssysteme	59
5.1.1.	Allgemeine Rotationen	59
6.	Lagrange-Mechanik	64
6.1.	Zwangsbedingungen	65
6.1.1.	d'Alembertsches Prinzip	66
6.1.2.	Generalisierte Koordinaten	69
7.	Hamilton-Mechanik	71
7.1.	Legendre-Transformation mit mehreren Komponenten	72
7.2.	Phasenraum	74
7.2.1.	Kanonische Transformationen	75
7.2.2.	Erzeugende Funktion	76
A.	Mathematische Ergänzung	79
A.1.	Definition eines Vektorraums	79
A.1.1.	Metrik	79
A.1.2.	Norm	79
A.1.3.	Skalarprodukt	80
A.2.	Herleitung der Rotationsmatrix	80
A.3.	Skalare, Vektoren und Tensoren	81

A.4. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n	82
A.4.1. Ableitungen	82
A.5. Partielle Ableitungen im Minkowski-Raum	84
A.6. Wiederholung: Lagrange-Multiplikatoren	87
A.7. Crashkurs: Legendre-Transformation	87

1. Grundbegriffe der Mechanik

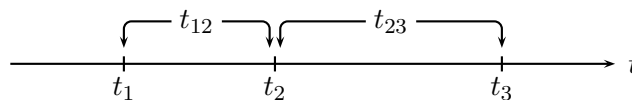
1.1. Zeit und Raum

1.1.1. Zeit

Die Alltagserfahrung zeigt uns, dass die Natur einem zeitlichen Verlauf unterliegt. Wir erleben eine zeitlich fortschreitende Gegenwart, die Zukunft und Vergangenheit voneinander trennt.

Unsere Modellvorstellung von Zeit beschreibt die Gegenwart als Zeitpunkt, d. h. als Ereignis ohne zeitliche Dauer. Die Zeit ist demnach ein Kontinuum geordneter Zeitpunkte.

Der zeitliche Abstand zwischen zwei Zeitpunkten kann mit Hilfe von Uhren (d. h. physikalisch realisierten Oszillatoren) gemessen werden. Dies erfordert die Definition einer willkürlichen Maßeinheit (z. B. Sekunde). Zeitabstände sind per Konstruktion additiv, d. h. $t_{13} = t_{12} + t_{23}$.



⇒ Zeit ist eindimensional und kann durch reelle Zahlen $t \in \mathbb{R}$ (multipliziert mit der gewählten Maßeinheit) modelliert werden¹.

Unsere Alltagserfahrung zeigt uns auch, dass Experimente unter gleichen Bedingungen wiederholt zu reproduzierbaren Resultaten führen. Sofern sich also die äußeren Bedingungen nicht ändern, sollten physikalische Gesetze unter zeitlicher Translation

$$t \rightarrow t + \Delta t \quad (1.1)$$

invariant sein.

Die so konstruierte Zeit ist zunächst auf einen Beobachter und dessen Uhr bezogen.

¹Das Modell einer beliebig oft teilbaren kontinuierlichen Zeit ist vermutlich nur eine sehr gute Näherung der Realität, die erst bei sehr kleinen Zeitabständen von ca. 10^{-27} s zusammenbricht und dort durch eine andere noch nicht etablierte Theorie ersetzt werden muss.

Zur Erinnerung:

\mathbb{R} ist ein vollständiger Zahlenkörper:

- Kommutative Gruppe der Addition mit neutralem Element 0.
- Kommutative Gruppe der Multiplikation mit neutralem Element 1.
(Ausnahme: 0 besitzt kein inverses Element.)
- Verträglichkeit zwischen $+$ und \cdot durch das Distributivgesetz:

$$a(b + c) = ab + ac$$

- Der Grenzwert jeder Cauchy-Folge liegt in der Menge selbst.

1.1.2. Raum

Unsere Alltagserfahrung zeigt uns ebenfalls, dass Objekte räumlich angeordnet sind. Der Raum erscheint uns dabei als „Container“, der unabhängig von den Objekten besteht und auch ohne Objekte vorstellbar ist.

Unsere übliche Modellvorstellung des Raumes ist die einer Vielfalt von **Orten**, wir bezeichnen deshalb den physikalischen Raum als **Ortsraum**. Zwischen den ausdehnungslosen punktförmigen Orten sind **Abstände** erklärt (die Länge der jeweils kürzesten Verbindung), die mit Hilfe eines Maßstabs gemessen werden können. Dies erfordert die Definition einer willkürlichen Maßeinheit (z. B. Meter)².

Anders als bei der Zeit sind Abstände nicht additiv, sondern erfüllen die Dreiecksungleichung $d_{13} \leq d_{12} + d_{23}$. Außerdem stellt man fest, dass die 10 Abstände zwischen 5 willkürlich gewählten Punkten nicht unabhängig sind, der Raum also dreidimensional ist. Außerdem sind zwischen sich treffenden Verbindungslinien Winkel erklärbar. Die Winkelsumme in einem Dreieck ist π , womit sich der Raum als ungekrümmt (d. h. eben, flach) herausstellt.

⇒ Der Ortsraum kann durch einen reellen dreidimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^3 mit einem euklidischen³ Skalarprodukt modelliert werden.

- Experimente sind an verschiedenen Orten reproduzierbar, der Ortsraum ist also **homogen**. Wir erwarten dementsprechend, dass die physikalischen Gesetze unter räumlichen Translationen

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \Delta\vec{r} \tag{1.2}$$

²Man vermutet, dass dieses Konzept im Bereich der sogenannten Planck-Länge von 10^{-35} m nicht mehr zutrifft. Man erwartet hier eine noch unbekannte, von Quantengravitation geprägte „schaumige“ Struktur des Raums.

³Euklid von Alexandria (griech. Eukleides), griechischer Mathematiker, lebte im dritten Jahrhundert vor Christus in Alexandria.

invariant sind.

- Ebenso können wir Experimente drehen mit reproduzierbaren Ergebnissen, der Ortsraum präsentiert sich uns also als isotrop in alle Richtungen. Wir erwarten dementsprechend, dass physikalische Gesetze unter räumlichen Rotationen

$$\vec{r} \rightarrow R(\vec{r}) \quad (1.3)$$

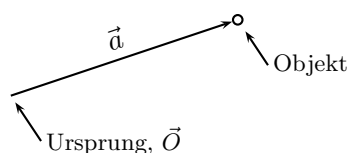
invariant sind. Rotationen sind dabei als lineare Abbildungen definiert, die „winkel-treu“ sind, also das Skalarprodukt unverändert lassen.

$$R(\vec{r}_1) \cdot R(\vec{r}_2) = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 \quad (1.4)$$

Man nennt das eine „orthogonale“ Transformation.

Darstellungen von Vektoren im Ortsraum \mathbb{R}^3

- Bildlich durch Pfeile:



- Darstellung in einer Basis:
 - Willkürliche Definition einer (linear unabhängigen) Basis:

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$$

- Komponentendarstellung eines Vektors:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i$$

- Matrixdarstellung des Skalarprodukts (metrischer Tensor) der Basisvektoren:

$$g_{ij} := \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$$

- Komponentendarstellung des Skalarprodukts:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j g_{ij}$$

– Standardmäßig arbeiten wir mit Orthonormalbasen:

$$g_{ij} = \delta_{ij} \quad (\text{rechtwinklig, normiert})$$

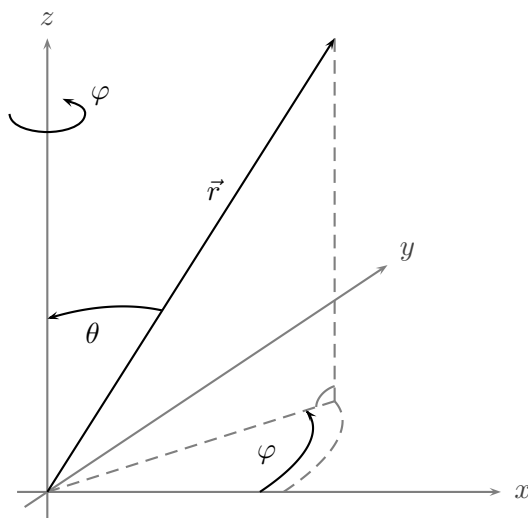
$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

In diesem Fall schreibt man auch:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Man bezeichnet diese auch als kartesische Koordinaten.

• Kugelkoordinaten:



$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi & r &\geq 0 \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi & \theta &\in [0, \pi] \\ z &= r \cos \theta & \varphi &\in [0, 2\pi[\end{aligned}$$

Vorsicht: An den „Polen“, d. h. für $\theta \in \{0, \pi\}$, ist φ für die Auswahl der Punkte wirkungslos. Bei Koordinatentransformationen kann es deshalb an den Polen zu Singularitäten kommen.

• ... und unzählige andere Darstellungen ...

Im Prinzip lässt sich ein räumlich-physikalisches Problem in *jeder* Darstellung ausrechnen. In der Praxis ist die Rechnung jedoch in bestimmten Darstellungen einfacher als in anderen. Dies ist vor allem der Fall, wenn die Darstellungen mit den Symmetrien des gegebenen Problems kompatibel sind, z. B.:

- kartesische Koordinaten bei Translationsinvarianz
- Kugelkoordinaten bei Rotationsinvarianz

Zwischen verschiedenen Darstellungen vermitteln dabei Koordinatentransformationen, d. h. Abbildungen von einem Koordinatensatz auf den anderen. Die obigen Koordinaten sind z. B. durch eine solche Koordinatentransformation $(xyz) \rightarrow (r\theta\varphi)$ definiert.

Orthogonale Transformationen

Welche linearen Abbildungen $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sind winkel- und längentreu, lassen also das Skalarprodukt invariant?

$$\text{Forderung: } (R\vec{a}) \cdot (R\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (1.5)$$

In einer Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ kann R als Matrix dargestellt werden:

$$\begin{aligned} R\vec{e}_i &= \sum_{j=1}^3 R_{ij}\vec{e}_j \\ \Rightarrow (R\vec{a})_i &= \sum_{j=1}^3 R_{ij}a_j \end{aligned}$$

$$\left[\text{entspricht: } \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{„Zeile mal Spalte“} \right]$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} (R\vec{a}) \cdot (R\vec{b}) &= \left(R \sum_i a_i \vec{e}_i \right) \cdot \left(R \sum_j b_j \vec{e}_j \right) \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j (R\vec{e}_i) \cdot (R\vec{e}_j) \\ &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j R_{ki} R_{lj} \underbrace{\vec{e}_k \cdot \vec{e}_l}_{g_{kl}} \\ &\stackrel{?}{=} \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i,j} a_i b_j g_{ij} \end{aligned}$$

Weil dies für alle \vec{a}, \vec{b} gelten soll, ist dieses Gleichungssystem nur erfüllt, wenn:

$$\sum_{k,l=1}^3 R_{ki} g_{kl} R_{lj} \stackrel{?}{=} g_{ij} \quad (1.6)$$

Der Einfachheit halber beschränken wir uns nun auf orthogonale Basen, d. h. $g_{ij} = \delta_{ij}$:

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^3 R_{ki} R_{kj} \stackrel{?}{=} \delta_{ij} \quad (1.7)$$

In Matrixschreibweise (R^T : transponierte Matrix, $\mathbb{1}$: Einheitsmatrix):

$$R^T R \stackrel{?}{=} \mathbb{1} \quad (1.8)$$

Im \mathbb{R}^3 sind die orthogonalen Transformationen die Drehungen.

Beispiel: (Drehung um die z-Achse)

Die folgende Transformation beschreibt eine Drehung um die z-Achse:

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{ij}$$

Eine Herleitung dieser Darstellung findet sich in Anhang A.2.

Die räumlichen Drehungen bilden eine Gruppe, die als $SO(3)$ bezeichnet wird (sprich: spezielle orthogonale Transformationen in 3 Dimensionen).

Durch Hinzunahme von Punktspiegelungen $R = -\mathbb{1}$, die ebenfalls die Orthogonalitätsbedingung $R^T R = \mathbb{1}$ erfüllen, wird diese Gruppe zur $O(3)$ erweitert (sprich: orthogonale Transformationen in 3 Dimensionen).

Zusammenfassung

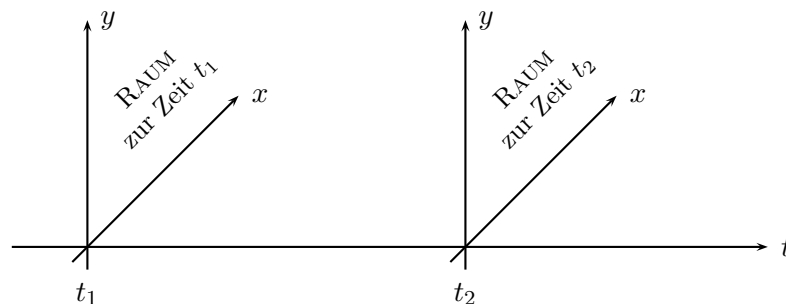
Zeit:

- eindimensional, $t \in \mathbb{R}$
- Zukunft/ Gegenwart/ Vergangenheit getrennt
- Translationsinvarianz
- keine „Rotationen“ in der Zeit möglich

Raum:

- dreidimensional, $t \in \mathbb{R}^3$
- Vektorraum mit Skalarprodukt
- Translationsinvarianz
- orthogonale Transformationen (Rotationen) lassen Skalarprodukt invariant
- keine Bereichstrennung (wie bei Vergangenheit/ Zukunft)

1.2. Verbindung von Raum und Zeit (Newton)



Konstruktion einer Raumzeit: $\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}$.

- Bei der Konstruktion der Newtonschen⁴ Raumzeit handelt es sich um eine zeitlich parametrisierte Abfolge von \mathbb{R}^3 -Räumen.
- Jeder dieser \mathbb{R}^3 -Räume kann in dieser Konstruktion individuell verschoben und gedreht werden. Ein im mathematischen \mathbb{R}^3 am Ursprung ruhender Beobachter kann sich auf diese Weise im physikalischen Raum bewegen und drehen. Damit wird ein Bezugssystem definiert.

1.2.1. Erstes Newtonsches Axiom

Es gibt Bezugssysteme, in denen die kräftefreie Bewegung von Objekten durch Geraden in der Raumzeit dargestellt wird, für die also gilt:

$$\dot{\vec{r}} = \text{const.}$$

Solche Bezugssysteme werden als **Inertialsysteme** bezeichnet.

⁴Sir Isaac Newton (* 4. Januar 1643 in Woolsthorpe-by-Colsterworth in Lincolnshire; † 31. März 1727 in London nach dem Gregorianischen Kalender; 25. Dezember 1642 – 20. März 1727 nach dem damals in England noch geltenden Julianischen Kalender), englischer Physiker, Mathematiker, Astronom und Philosoph.

BEMERKUNG:

Es gibt unendlich viele Inertialsysteme, die sich durch zeitlich konstante Relativgeschwindigkeiten unterscheiden.

Da alle Inertialsysteme gleichwertig sind (Relativitätsprinzip der Newtonschen Mechanik) müssen physikalische Gesetze invariant unter Bezugssystemwechsel sein.

$$(\vec{r}, t) \rightarrow (\vec{r} + \vec{v}t, t)$$

Insgesamt sind die Gesetze also invariant unter:

- Zeitliche Translation $(\vec{r}, t) \rightarrow (\vec{r}, t + \Delta t)$
- Räumliche Translation $(\vec{r}, t) \rightarrow (\vec{r} + \Delta\vec{r}, t)$
- Rotationen $(\vec{r}, t) \rightarrow (R\vec{r}, t)$ mit $RR^T = \mathbb{1}$
ggf. mit Spiegelungen $(\vec{r}, t) \rightarrow (-\vec{r}, t)$
- Bezugssystem-Wechsel $(\vec{r}, t) \rightarrow (\vec{r} + \vec{v}t, t)$

Diese Transformationen bilden die 10-parametrische Gruppe der sogenannten Galilei⁵-Transformationen.

Merke:

Newtons Physik ist Galilei-invariant.

Man beachte, dass die Zeit in der nichtrelativistischen Physik absolut ist, d. h., sie ist bis auf zeitliche Translationen identisch in allen Inertialsystemen.

1.3. Relativistische Raumzeit

- Wie bei Newton wird die relativistische Raumzeit durch Festlegung eines Bezugssystems konstruiert.
- Wie bei Newton gibt es Inertialsysteme, in denen sich kräftefreie Körper geradlinig-gleichförmig bewegen.
- Im Unterschied zu Newton werden Raum und Zeit zu einem *gemeinsamen* Vektorraum vereinigt. Um dies zu ermöglichen, muss die Zeit t in eine Länge umgerechnet werden. Dies geschieht mit einer neuen Fundamentalkonstante, der Lichtgeschwindigkeit $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s. Damit wird ct zu einer zeitlichen „Länge“.

⁵Galileo Galilei (* 15. Februar 1564 in Pisa; † 8. Januar 1642 in Arcetri bei Florenz), italienischer Philosoph, Mathematiker, Physiker und Astronom.

Die Elemente des gemeinsamen Vektorraums sind Vierervektoren:

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Es ist üblich, die Elemente dieses Vektors von 0..3 zu indizieren.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

mit $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Soweit ist dies nur Notation.

Die neue Struktur der speziellen Relativitätstheorie besteht nun darin, dass die gesamte Raumzeit (und nicht nur der räumliche Anteil) mit einem Skalarprodukt ausgestattet wird.

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{\mu, \nu=0}^3 x_\mu y_\nu g_{\mu\nu} \quad (1.11)$$

In einer orthonormalen Basis gilt⁶:

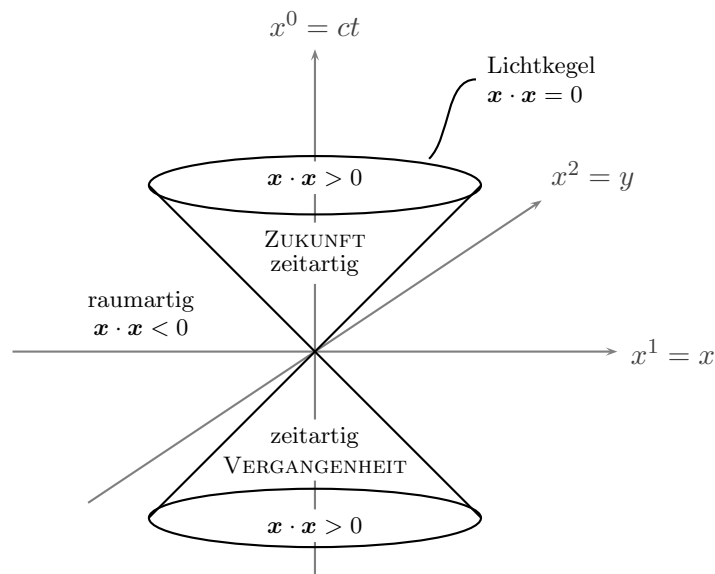
$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass das Normquadrat $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ nicht mehr positiv ist, sondern negativ werden kann. Dadurch wird die zeitliche Trennung von Zukunft und Vergangenheit weiterhin sichergestellt.

Die wesentliche Neuerung der speziellen Relativitätstheorie besteht nun in der Forderung, dass die physikalischen Gesetze nicht nur unter räumlichen Rotationen, sondern auch unter die Zeit involvierenden „Rotationen“ (orthogonalen Transformationen) invariant sind.

Zeit und Raum können also durch „Drehung“ ineinander umgewandelt werden, ohne die Form der physikalischen Gesetze zu ändern. Allerdings handelt es sich nicht um normale Drehungen, denn die nullte Komponente von $g_{\mu\nu}$ ist negativ.

⁶Viele Lehrbücher benutzen auch $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$. Hier gibt es unterschiedliche Konventionen. Alternativ kann man auch kontravariante Indices (Index oben) und kovariante Indices (Index unten) einführen und spart sich so die $g_{\mu\nu}$ -Matrizen. — Manche ältere Lehrbücher verwenden auch die imaginäre Einheit i , um die Vorzeichen zu erzeugen.



Zur Übung betrachten wir eine zweidimensionale Raumzeit mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$, $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$. Die Bestimmungsgleichung für orthogonale Transformationen lautet (vgl. Gl. (1.6)):

$$\sum_{\nu, \lambda=0}^1 R_{\nu\mu} g_{\nu\lambda} R_{\lambda\rho} = g_{\mu\rho}$$

oder in Matrizenform:

$$R^T g R = g$$

Rechnung:

$$R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad ; \quad R^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad ; \quad g = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R^T g R = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

Die Lösung lautet:

$$R = \begin{pmatrix} \cosh \omega & \sinh \omega \\ \sinh \omega & \cosh \omega \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

$$\left[\cosh \omega := \frac{1}{2} (e^\omega + e^{-\omega}) \quad ; \quad \sinh \omega := \frac{1}{2} (e^\omega - e^{-\omega}) \right]$$

Was tut diese Transformation?

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \omega & \sinh \omega \\ \sinh \omega & \cosh \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

Um das zu verstehen, betrachten wir einen ruhenden Punkt $x' = 0$. Wie wird er unter Transformation abgebildet?

$$\begin{aligned} ct &= (\cosh \omega) ct' \\ x &= (\sinh \omega) ct' \\ \Rightarrow \frac{x}{t} &= c \cdot \tanh \omega \end{aligned} \quad (1.14)$$

Die linke Seite ist eine Geschwindigkeit $v = \frac{x}{t}$. Nach der Transformation bewegt sich also der zuvor ruhende Punkt mit der konstanten Geschwindigkeit v .

\Rightarrow Dies sind die Lorentz⁷-Transformationen (Bezugssystemwechsel).

Dabei gilt:

$$\omega = \operatorname{artanh} \left(\frac{v}{c} \right) \quad (1.15)$$

Mit den Abkürzungen $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ist:

$$R = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Und so gelangt man zur Schulbuch-Form der Lorentz-Transformation:

$$\begin{aligned} t &= \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \\ x &= \gamma (x' + vt') \end{aligned}$$

Mit der Umkehrung:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \\ x' &= \gamma (x - vt) \end{aligned}$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall $c \rightarrow \infty$ erhält man die Galilei-Transformationen der Newtonschen Mechanik:

$$\begin{aligned} c \rightarrow \infty &\Rightarrow \gamma \rightarrow 1 \\ \Rightarrow t &= t' \\ x &= x' + vt' \end{aligned}$$

Man sieht: Im nichtrelativistischen Grenzfall $c \rightarrow \infty$ erhält man wieder eine „absolute Zeit“.

⁷Hendrik Antoon Lorentz (* 18. Juli 1853 in Arnhem; † 4. Februar 1928 in Haarlem), niederländischer Mathematiker und Physiker.

1.3.1. Zusammenfassung

Die Symmetrien der relativistischen Raumzeit sind:

- Raumzeitliche Translationen:

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x} \quad (\text{Raum und Zeit kombiniert})$$

- Orthogonale Transformationen, welche das (nichteuclidische) Skalarprodukt⁸ invariant lassen, bestehend aus:

– Rotationen im Raum, z. B.:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos \varphi & -\sin \varphi & \\ & \sin \varphi & \cos \varphi & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{um z-Achse}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos \varphi & -\sin \varphi & \\ & \sin \varphi & 1 & \\ & & & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{um y-Achse}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ & & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{um x-Achse}$$

– Hyperbolische „Rotationen“ zwischen Raum und Zeit (d. h. Bezugssystemwechsel, Lorentz-Boosts):

$$R = \begin{pmatrix} \cosh \omega & \sinh \omega & & \\ \sinh \omega & \cosh \omega & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{in x-Richtung}$$

$$R = \begin{pmatrix} \cosh \omega & & \sinh \omega & \\ \sinh \omega & 1 & \cosh \omega & \\ & & 1 & \\ & & & \cosh \omega \end{pmatrix} \quad \text{in y-Richtung}$$

$$R = \begin{pmatrix} \cosh \omega & & & \sinh \omega \\ \sinh \omega & & & \cosh \omega \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{in z-Richtung}$$

wobei $\omega = \text{artanh}\left(\frac{v}{c}\right)$ ist.

⇒ Damit ergibt sich eine 10-parametrische Gruppe, genannt die Poincaré⁹-Gruppe.

1.4. Geometrische Effekte in der relativistischen Raumzeit

Für die kommenden Überlegungen gilt folgende Vereinbarung:

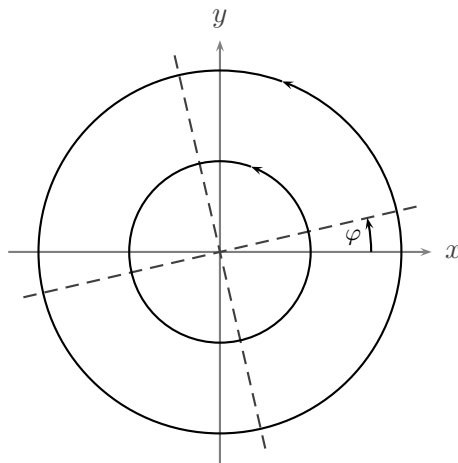
Ungestrichenes System: Wir (Beobachter)

Gestrichenes System: Stab bzw. Uhr

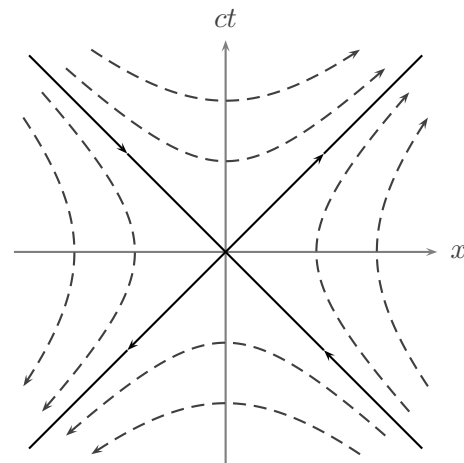
⁸Hierbei ist $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$.

⁹Jules Henri Poincaré (* 29. April 1854 in Nancy; † 17. Juli 1912 in Paris), französischer Mathematiker und theoretischer Physiker.

Wie unterscheidet sich eine hyperbolische „Drehung“ von einer normalen Drehung?



Gewöhnliche Drehung: Kreise.



Hyperbolische Drehung: Hyperbeln.

In beiden Fällen: Geraden bleiben Geraden!

1.4.1. Längenkontraktion eines bewegten Stabes

Die Eigenlänge des Stabes ist diejenige, die der Stab selbst an sich messen würde.

$$l_0 = x'_2 - x'_1$$

Die Lorentz-Transformation ergibt:

$$l_0 = \gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1)$$

Wir (die Beobachter) messen die Länge zu einem Zeitpunkt $t = t_1 = t_2$:

$$l = x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma} l_0 \quad \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \geq 1 \right)$$

$$\Rightarrow l \leq l_0$$

1.4.2. Zeitdilatation einer bewegten Uhr

Eine bewegte Uhr misst an sich selbst die Eigenzeit:

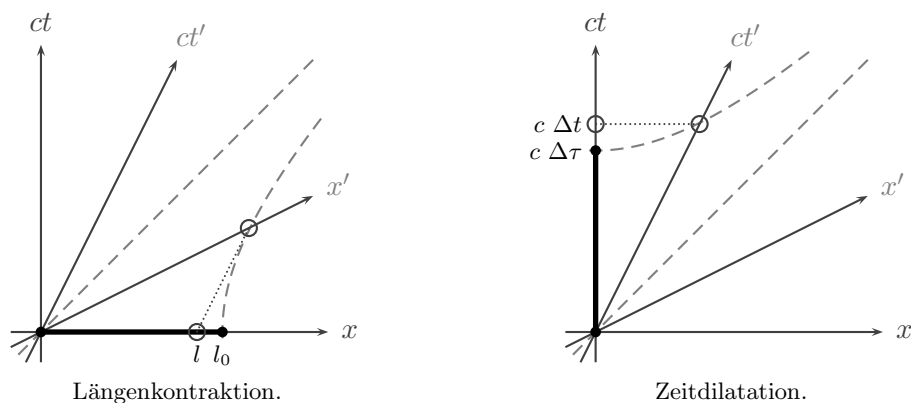
$$\Delta\tau = t'_2 - t'_1 \quad \text{mit } x'_1 = x'_2$$

Wir messen:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma\left(t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_2\right) - \gamma\left(t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_1\right) = \gamma\Delta\tau$$

$$\Rightarrow \Delta t \geq \Delta\tau$$

Geometrische Deutung der Effekte in der relativistischen Raumzeit:



1.5. Der Minkowski-Raum

Der sogenannte Minkowski¹⁰-Raum ist nichts anderes als die Raumzeit mit der vorgegebenen Metrik $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$. Um allerdings nicht bei jeder Skalarproduktbildung $g_{\mu\nu}$ -Faktoren schreiben zu müssen, führt man folgende Notation ein:

- Viererortsvektor, Index oben (kontravariante Darstellung):

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

- Viererortsvektor, Index unten (kovariante Darstellung):

$$x_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} x^\nu \quad (1.18)$$

$$\text{also: } \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

Es handelt sich hier um zwei unterschiedliche Darstellungen ein und desselben Vektors \mathbf{x} . Mit diesen beiden Darstellungen lässt sich das Skalarprodukt schön schreiben als:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_\mu x^\mu y_\mu = \sum_\mu x_\mu y^\mu \quad (1.20)$$

¹⁰Hermann Minkowski (* 22. Juni 1864 in Aleksotas, Russland (heute Kaunas); † 12. Januar 1909 in Göttingen), deutscher Mathematiker und Physiker.

Um darüber hinaus nicht ständig Summen schreiben zu müssen, vereinbaren wir die Einsteinsche¹¹ Summenkonvention, d. h. über paarweise hoch- und tiefgestellte Indices in einem Term wird automatisch von 0 bis 3 summiert, also z. B.:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^\mu y_\mu = x_\mu y^\mu \quad (1.21)$$

Zur Relation $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$ definieren wir die Umkehrabbildung $x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$. Dabei ist $g^{\mu\nu}$ die inverse Matrix von $g_{\mu\nu}$, d. h. hier $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$. Der metrische Tensor $g^{\mu\nu}$ bzw. $g_{\mu\nu}$ erweist sich so als eine „Maschine“ zum Heben und Senken von Indices:

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad (\text{Heben})$$

$$x_\lambda = g_{\lambda\sigma} x^\sigma \quad (\text{Senken})$$

1.6. Zusammenfassung

- Die 1 + 3-dimensionale Raumzeit ist ein Vektorraum mit einem nichteuklidischen Skalarprodukt:

$$g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{also: } \begin{pmatrix} ct_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct_2 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = c^2 t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2$$

- Lineare Abbildungen, welche dieses Skalarprodukt invariant lassen, umfassen Rotationen „ $\begin{pmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{pmatrix}$ “ in den räumlichen Komponenten und hyperbolische Transformationen „ $\begin{pmatrix} \cosh & \sinh \\ \sinh & \cosh \end{pmatrix}$ “ zwischen Raum und Zeit, sog. Lorentz-Transformationen.
- Relativistische physikalische Größen müssen unter diesen Transformationen form-invariant sein. Die Newtonsche Physik erhält man im Grenzfall $c \rightarrow \infty$.

¹¹ Albert Einstein (* 14. März 1879 in Ulm; † 18. April 1955 in Princeton, USA), einer der bedeutendsten Physiker des 20. Jahrhunderts.

2. Kinematik von Massenpunkten

2.1. Massenpunkte

Massenpunkte sind idealisierte ausdehnungslose Objekte, die sich in der Raumzeit auf Bahnen bewegen. Die einzige innere Eigenschaft besteht in ihrer Ruhemasse m . Die Ruhemasse m ist eine skalare Größe (d. h. invariant unter Drehungen und Bezugssystemwechseln).

2.1.1. Bahnen

Massenpunkte bewegen sich auf kontinuierlichen (stetig differenzierbaren) Bahnen.

- Nichtrelativistische Teilchenbahn:

In der Newtonschen Mechanik kann man die universelle Zeit als Bahnparameter benutzen:

$$\text{Teilchenbahn} \quad \vec{r}(t) \quad (2.1)$$

Davon ausgehend definieren wir die

$$\text{Geschwindigkeit} \quad \vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) \quad (2.2)$$

und die

$$\text{Bahnbeschleunigung} \quad \vec{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) \quad (2.3)$$

BEMERKUNG:

t sowie $\frac{d}{dt}$ sind in der Newtonschen Physik Skalare, somit handelt es sich bei \vec{v} und \vec{a} also um Vektoren.

- Relativistische Teilchenbahnen:

Hier ist die Zeit t kein skalarer Parameter mehr, sondern eine Vierervektorkomponente, die von unterschiedlichen Bezugssystemen aus unterschiedlich erscheint. Sie eignet sich deshalb nicht mehr als Bahnparameter.

Stattdessen stellen wir uns vor, dass jedes Teilchen eine „Armbanduhr“ mit sich führt, welche die vom Teilchen tatsächlich erlebte Eigenzeit τ anzeigt. Diese ist von

allen Bezugssystemen aus gleich, d. h. eine skalare Größe, und eignet sich deshalb als Bahnparameter:

$$\text{Teilchenbahn} \quad \mathbf{x}(\tau) \quad (2.4)$$

Davon ausgehend definieren wir die

$$\text{Vierergeschwindigkeit} \quad \mathbf{u}(\tau) = \frac{d}{d\tau} \mathbf{x}(\tau) \quad (2.5)$$

und die

$$\text{Viererbeschleunigung} \quad \mathbf{a}(\tau) = \frac{d^2}{d\tau^2} \mathbf{x}(\tau) \quad (2.6)$$

BEMERKUNG:

Das Betragsquadrat von \mathbf{u} ist konstant!

Denn zwischen zwei Inertialsystemen gilt: Zeitintervalle dt im Laborsystem und Zeitintervalle $d\tau$ der Eigenzeit sind verknüpft über die Zeitdilatation:

$$dt = \gamma d\tau \quad \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$$

also gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} &= \gamma \frac{d}{dt} \quad \left(= \frac{d}{dt} \gamma \right) \\ \Rightarrow \quad \mathbf{u}(\tau) &= \frac{d}{d\tau} \mathbf{x}(\tau) = \gamma \frac{d}{dt} \mathbf{x}(\tau) \\ \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} &= \gamma \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist das Skalarprodukt:

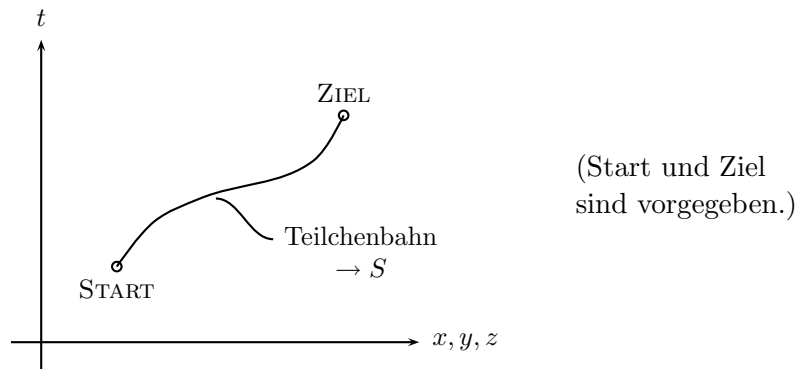
$$\mathbf{u}^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \gamma^2 (c^2 - v^2) = c^2 \quad (2.7)$$

Der „Betrag“ der relativistischen Vierergeschwindigkeit ist somit konstant und gleich c . Gewissermaßen muss sich das relativistische Teilchen immer fortbewegen, selbst wenn es ruht, nämlich in Richtung der Zeit.

2.2. Prinzip der kleinsten Wirkung

- Jedem nur denkbaren Bewegungsablauf in der Natur bei vorgegebenen Randbedingungen wird ein Skalar $S \in \mathbb{R}$, genannt Wirkung, zugeordnet.
- In der Natur ist derjenige Ablauf realisiert, für den die Wirkung *minimal* ist.
- Für zwei nichtwechselwirkende Teilsysteme ist die Wirkung additiv.

2.2.1. Wirkung eines Massepunktes



Wegen der Additivität kann S als Integral entlang der Bahn ausgedrückt werden.

nichtrelativistisch:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t) dt$$

relativistisch:

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau$$

\mathcal{L} ist in beiden Fällen die Lagrange¹-Funktion: „Wirkung pro (Eigen-)Zeit“.

2.3. Freies nichtrelativistisches Teilchen

Wie groß ist die Wirkung einer bestimmten Bahn, das heißt, wie sieht die Lagrange-Funktion \mathcal{L} konkret aus?

Wir zeigen am Beispiel des freien Teilchens, dass \mathcal{L} durch Symmetrien bestimmt ist:

- Zeittranslationsinvarianz:

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}, t) = \mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v})$$

↙ keine Zeitabhängigkeit

¹Joseph Louis Lagrange (* 25. Januar 1736 in Turin; † 10. April 1813 in Paris), italienischer Mathematiker und Astronom.

- Raumtranslationsinvarianz:

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}) = \mathcal{L}(\vec{v})$$

↙ keine Ortsabhängigkeit

- Rotationsinvarianz:

Die Richtung von \vec{v} darf keine Rolle spielen, also

$$\mathcal{L}(\vec{v}) = f(\vec{v} \cdot \vec{v}) = f(v^2)$$

- Galilei-Invarianz:

Diese Symmetrie ist schwieriger auszuwerten, deshalb betrachten wir infinitesimale Bezugssystemwechsel mit der Relativgeschwindigkeit $\vec{\epsilon}$.

$$\begin{aligned} S = \int_{t_1}^{t_2} f(\vec{v} \cdot \vec{v}) dt &\longrightarrow S' = \int_{t_1}^{t_2} f((\vec{v} + \vec{\epsilon}) \cdot (\vec{v} + \vec{\epsilon})) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} f(\vec{v} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{\epsilon} + \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}) dt \\ &\approx \int_{t_1}^{t_2} (f(\vec{v} \cdot \vec{v}) + 2f'(\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v} \cdot \vec{\epsilon}) dt \end{aligned}$$

Taylor 1. Ordnung ↙

Der zweite Term muss unabhängig von der Bahn sein. Dazu muss er eine totale Ableitung einer Funktion von \vec{r} und t sein. Dies ist nur der Fall, wenn $f' = \text{const.}$ ist.

$$\Rightarrow f(x) \propto x \qquad \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(\vec{v}) \propto v^2}$$

Die Proportionalitätskonstante nennen wir $m/2$, wobei m die sogenannte „träge Masse“² des Teilchens ist.

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\vec{v}) = \frac{m}{2} v^2 \qquad (2.8)$$

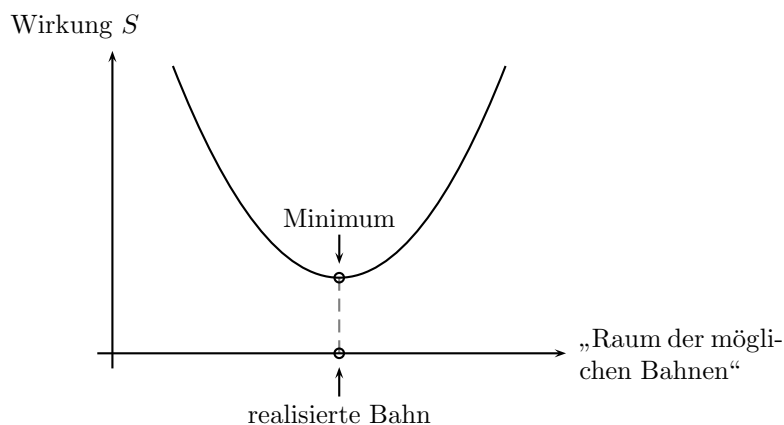
$$\Rightarrow S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} v^2(t) dt \qquad (2.9)$$

Die Wirkung eines nichtrelativistischen freien Teilchens ist also seine zeitlich aufintegrierte kinetische Energie.

²Wie sich später in der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) zeigen wird, handelt es sich bei „träger“ und „schwerer Masse“ um dieselbe Eigenschaft eines Körpers, das heißt, träge Masse und schwere Masse sind gleich und brauchen deshalb nicht unterschieden zu werden — die verschiedenen Bezeichnungen beziehen sich nur auf die jeweilige Verwendung der Masse im Newtonschen Kraftgesetz bzw. in der Newtonschen Gravitationstheorie.

2.3.1. Bahnvariation

Wie bestimmt man nun die in der Natur realisierte Bahn, für welche die Wirkung minimal ist? Dazu stellen wir uns die Wirkung als Funktion der möglichen Bahnen vor:

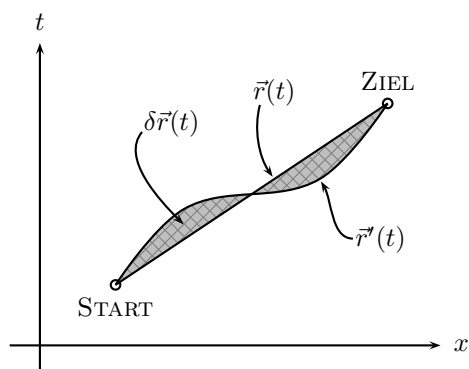


Diese Skizze ist natürlich nur als Hilfsvorstellung zu verstehen. Sie ruft uns in Erinnerung, dass das Extremum einer Funktion dadurch charakterisiert ist, dass die erste Ableitung der Funktion gleich Null ist.

Etwas konkreter bedeutet das: Die Bahn der kleinsten Wirkung ist dadurch charakterisiert, dass die Wirkung S bei infinitesimaler Variation der Bahn in erster Ordnung unverändert bleibt. Dieses Vorgehen führt zu einem eigenständigen Teilgebiet der Mathematik, der **Variationsrechnung**.

Im Fall des nichtrelativistischen Teilchens funktioniert das folgendermaßen:

Angenommen, $\vec{r}(t)$ sei die realisierte Bahn, für welche die Wirkung minimal ist. Wir variieren die Bahn nun ein wenig durch Addition einer kleinen Abweichung $\delta\vec{r}(t)$:



$$\vec{r}(t) \rightarrow \vec{r}'(t) := \vec{r}(t) + \delta\vec{r}(t)$$

- Die Randbedingungen sollen bei der Variation weiterhin erfüllt bleiben, also

$$\delta\vec{r}(t_1) = \delta\vec{r}(t_2) = \vec{0},$$

d. h., die Variation an den Endpunkten verschwindet.

- Beachten Sie, dass eine raumzeitliche Variation der Bahn auch eine Variation der Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) \rightarrow \vec{v}'(t) := \vec{v}(t) + \delta\vec{v}(t)$$

mit sich bringt, wobei $\delta\vec{v}(t) = \delta\dot{\vec{r}}(t)$ ist.

Bei Variation verändert sich die Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\vec{v}(t)) dt$$

und wird zu

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\vec{v}(t) + \delta\vec{v}(t)) dt \quad \Big| \text{ Taylor 1. Ordnung} \\ &\approx \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \mathcal{L}(\vec{v}(t)) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}(\vec{v}(t))}{\partial v_i} \delta v_i(t) + \dots \right\} dt. \end{aligned}$$

Das Prinzip der kleinsten Wirkung sagt nun, dass sich S bei Variation der Bahn in erster Ordnung nicht ändert (dies gilt für alle denkbaren infinitesimalen Variationen):

$$\sum_{i=1}^3 \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}(\vec{v}(t))}{\partial v_i} \delta v_i(t) dt = 0$$

Man kann zeigen (durch partielle Integration), dass dies nur dann möglich ist, wenn

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\vec{v}(t))}{\partial v_i} = \text{const}_i \quad (\text{d. h. zeitunabhängig}) \quad (2.10)$$

ist. Dann nämlich kann man diesen Term vor das Integral ziehen:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}(\vec{v}(t))}{\partial v_i} \int_{t_1}^{t_2} \delta v_i(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}(\vec{v}(t))}{\partial v_i} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (\delta r_i(t)) dt}_{=\delta r_i(t_2) - \delta r_i(t_1) = 0} = 0 \end{aligned}$$

Die vorgezogene Ableitung ist der sogenannte Impuls des Teilchens $p_i := \frac{\partial \mathcal{L}(\vec{v}(t))}{\partial v_i}$ bzw.

$$\vec{p}(t) := \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_x} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_y} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Der Impuls eines Teilchens lässt sich interpretieren als Anstieg des „Wirkungsverbrauchs“ bei Geschwindigkeitserhöhung.

$$\boxed{p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}} \quad (2.12)$$

Beim freien Teilchen ist, wie wir gezeigt haben:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

Der Impuls ist also:

$$\begin{aligned} p_i &:= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} = mv_i \\ \Rightarrow \vec{p} &= m\vec{v} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Die obige Rechnung (Gl. (2.10) mit Definition des Impulses) hat ergeben, dass die Bahn mit der kleinsten Wirkung durch

$$\vec{p} = \text{const.}$$

gegeben ist. Mit $\vec{p} = m\vec{v}$ bedeutet dies, dass $\vec{v} = \text{const.}$ ist, dass also für eine geradlinige gleichförmige Bewegung die Wirkung minimal ist.

2.3.2. Energieerhaltung

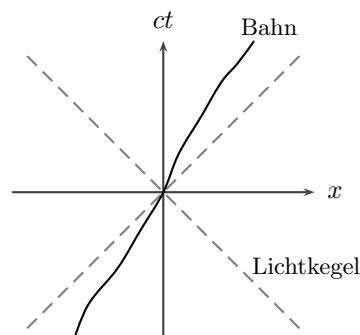
Da \vec{p} zeitlich konstant ist, muss auch $\vec{p} \cdot \vec{p}$ konstant sein. Daraus ergibt sich, dass die Energie

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{m}{2}v^2 \quad (2.14)$$

eines freien Teilchens ebenfalls erhalten ist.

2.4. Freies relativistisches Teilchen

Hier ist die Situation *viel* einfacher. Die Wirkung eines relativistischen Teilchens ist proportional zur Länge seiner Bahn (auch „Weltlinie“ genannt):



$$S \propto \int_{\text{Start}}^{\text{Ziel}} ds$$

(mit $ds^2 = dx^\mu dx_\mu > 0$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &\propto \int_{\text{Start}}^{\text{Ziel}} \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\frac{dx^\mu dx_\mu}{d\tau d\tau}} d\tau \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{u^\mu u_\mu} d\tau \end{aligned}$$

Vergleicht man das mit dem Ansatz zur Lagrange-Funktion beim freien nichtrelativistischen Teilchen (Abschnitt 2.3) und setzt analog hierzu in den allgemeinen Ansatz für einen relativistischen Massepunkt (Abschnitt 2.2.1) ein, so erhält man:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) = \mathcal{L}(\mathbf{u}(\tau)) \propto \sqrt{u^\mu u_\mu} \quad (2.15)$$

Wichtige Anmerkung:

Man darf an dieser Stelle nicht $u^\mu u_\mu = c^2$ aus Gl. (2.7) einsetzen, denn sonst würden sich bei Variation die Integrationsgrenzen τ_1, τ_2 verändern müssen. An dieser Stelle ist τ nichts weiter als eine beliebige skalare Parametrisierung der Bahnen. Die Interpretation als Eigenzeit, nämlich $u^\mu u_\mu = c^2$, wird erst im *Ergebnis* eingesetzt.

Damit die Bahn eines freien Teilchens, also die direkte Verbindung durch eine Gerade, wie erwartet der *kleinsten* Wirkung entspricht, muss die gesuchte Proportionalitätskonstante negativ sein (vgl. Bemerkung auf der nächsten Seite). Wir schreiben deshalb:

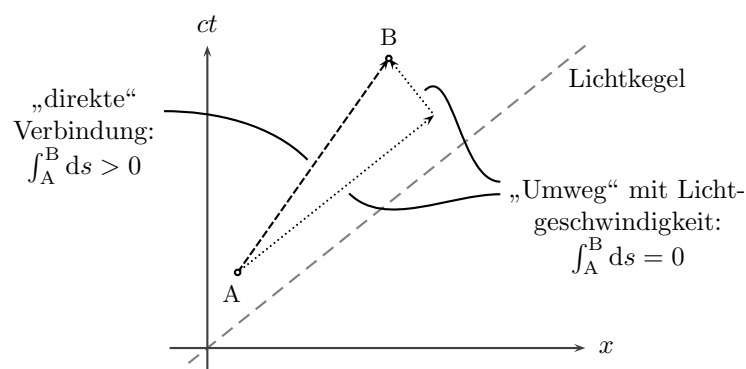
$$S = -C \int_{\text{Start}}^{\text{Ziel}} ds = -C \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{u^\mu u_\mu} d\tau \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{u}) = -C \sqrt{u^\mu u_\mu} \quad (2.17)$$

Dieses Vorzeichen ist jedoch nur eine Konvention. Die Konstante C werden wir nachher durch Vergleich mit dem nichtrelativistischen Grenzfall bestimmen.

BEMERKUNG:

Im Minkowski-Raum ist eine Gerade zwischen zwei Punkten nicht die kürzeste, sondern die längste Verbindung:



Sei $\mathbf{x}(\tau)$ die in der Natur realisierte Teilchenbahn mit der Wirkung

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}(\mathbf{u}(\tau)) d\tau$$

Wie im nichtrelativistischen Fall (Abschnitt 2.3) fordern wir, dass S bei Bahnvariationen

$$\mathbf{x}(\tau) \rightarrow \mathbf{x}'(\tau) := \mathbf{x}(\tau) + \delta\mathbf{x}(\tau)$$

in erster Ordnung unverändert bleibt. Wie zuvor werden dabei Anfangs- und Endpunkte der Bahn festgehalten:

$$\delta\mathbf{x}(\tau_1) = \delta\mathbf{x}(\tau_2) = \mathbf{0}$$

Wir entwickeln S' in erster Ordnung:

$$\begin{aligned} S' &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}(\mathbf{u}(\tau) + \delta\mathbf{u}(\tau)) d\tau \\ &\approx \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left\{ \mathcal{L}(\mathbf{u}(\tau)) + \underbrace{\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{u}(\tau))}{\partial u_\mu} \delta u_\mu(\tau)}_{= \partial_\mu \mathcal{L} \delta u^\mu} \right\} + \dots \\ &= S + \sum_{\mu=0}^3 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{u}(\tau))}{\partial u_\mu} \frac{d}{d\tau} \delta x_\mu(\tau)}_{= \partial_\mu \mathcal{L} \frac{d}{d\tau} \delta x^\mu} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Partielle Integration,} \\ \text{Randterme} = 0 \end{array} \right. \\ &= S - \sum_{\mu=0}^3 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \underbrace{\delta x_\mu(\tau) \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{u}(\tau))}{\partial u_\mu}}_{= \delta x^\mu \frac{d}{d\tau} \partial_\mu \mathcal{L}} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich als Kriterium für die Bahn mit minimaler Wirkung, dass

$$\boxed{p^\mu := -\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{u}(\tau))}{\partial u_\mu}} \quad \mu = 0..3 \quad (2.18)$$

eine Erhaltungsgröße ist. Das Minuszeichen ist dabei wiederum konventionsbedingt. Der durch die vier Komponenten p^μ definierte Vierervektor \mathbf{p} ist der relativistische Viererimpuls des Teilchens.

Im Falle des freien Teilchens ist $\mathcal{L} = -C\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$. Wegen

$$\begin{aligned} \partial^\mu(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) &= \frac{\partial}{\partial u_\mu}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial u_\mu}(g^{\nu\rho}u_\nu u_\rho) \\ &= g^{\nu\rho}(\delta_\nu^\mu u_\rho + u_\nu \delta_\rho^\mu) = 2u^\mu \end{aligned}$$

erhält man den Viererimpuls

$$p^\mu = C \frac{2u^\mu}{2\underbrace{\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}}_{=c}} = \frac{C}{c}u^\mu \quad (2.19)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \frac{C}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Damit im nichtrelativistischen Grenzfall $c \rightarrow \infty$ der gewöhnliche Newtonsche Impuls herauskommt, muss gelten:

$$C = mc$$

↙
Ruhemasse, Skalar

Damit ist der Viererimpuls

$$\boxed{\mathbf{p} = m\mathbf{u}} \quad (2.21)$$

eine Erhaltungsgröße. Dieser Vierervektor hat drei räumliche Impulskomponenten

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

sowie eine zeitliche Komponente $p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, die ebenfalls erhalten ist. Diese Erhaltungsgröße, multipliziert mit c , bezeichnen wir als **Energie**:

$$E = p^0 \cdot c \quad (2.22)$$

Wichtige Anmerkung:

Impuls ist eine „räumliche“ Erhaltungsgröße, Energie dagegen eine „zeitliche“.

In der relativistischen Theorie treten sie gleichberechtigt nebeneinander auf.

Der Viererimpulsvektor setzt sich also zusammen aus

$$\begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Was passiert nun bei Bezugssystemwechseln? Bei Vierervektoren \boldsymbol{x} wird Raum in Zeit und Zeit in Raum transformiert, wobei $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$ unverändert bleibt. Ähnlich wird beim Vierervektor \boldsymbol{p} Energie in Impuls und Impuls in Energie überführt, wobei $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p}$ unverändert bleibt:

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p} = m^2 \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = m^2 c^2$$

Setzt man die obigen Komponenten ein, erhält man

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 c^2 \quad (2.24)$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \pm \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}} \quad (2.25)$$

(Dabei bezeichnet p^2 das Betragsquadrat des räumlichen Impulses. Das \pm ist neu in der Relativitätstheorie und hängt im weiteren Sinne mit der Existenz von Antimaterie zusammen. Wir beschränken uns hier auf „+“.)

Für ein ruhendes Teilchen $p = 0$ ergibt sich insbesondere die aus der Populärwissenschaft bekannte Formel:

$$E_0 = mc^2$$

Anders als in der Newtonschen Physik trägt ein ruhendes Teilchen eine Ruheenergie. Die hinzukommende Bewegungsenergie kann man im klassischen Grenzfall durch eine Taylor-Entwicklung abschätzen:

$$\begin{aligned} E = E_0 + E_{\text{kin}} &= \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} \quad (\text{mit } p \ll mc) \\ &\approx mc^2 + \frac{1}{2mc^2} \cdot p^2 c^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_{\text{kin}} &= \frac{p^2}{2m} + \text{Terme von Ordnung } p^4 \\ &= \frac{m}{2} v^2 + \text{Terme von Ordnung } v^4 \end{aligned}$$

2.4.1. Photonen bzw. Strahlungsteilchen

Setzt man formal $m = \frac{|p|}{c}\epsilon$ und $v = c(1 - \epsilon^2/2)$ und führt dann den Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ durch, so divergiert zwar die Vierergeschwindigkeit, jedoch der Viererimpuls bleibt endlich:

$$\begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |p| \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Dieser Limes beschreibt Teilchen mit Ruhemasse $m = 0$ und Impuls \vec{p} , die nur existieren können, wenn sie sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Ihre Energie ist $E = |p|c$.

3. Kräfte

3.1. Die Newtonschen Axiome

Bislang haben wir kräftefreie Bewegungen in Inertialsystemen betrachtet, bei denen der Impuls

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (\text{nichtrelativistisch})$$

bzw.

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} \quad (\text{relativistisch})$$

eine Erhaltungsgröße ist, d. h.

$$\dot{\vec{p}} = \vec{0}$$

bzw.

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{p} = \mathbf{0}.$$

Eine Kraft, die auf das Teilchen wirkt, führt zu einer Impulsänderung. In der Newtonschen Physik gilt gemäß dem 2. Newtonschen Axiom:

$$\boxed{\dot{\vec{p}} = \vec{F}} \quad (3.1)$$

Die Einheit der Kraft ist $\text{N} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$. Der Einfluss einer Kraft tritt in messbarer Form als Beschleunigung zutage:

$$m\vec{r}'' = \vec{F}, \quad (3.2)$$

wobei m die Masse des Teilchens ist. Kräfte sind Vektoren und deshalb additiv!

In der Newtonschen Mechanik werden Kräfte entweder direkt (durch Kontakt) oder durch instantane Fernwechselwirkungen vermittelt.



Als 3. Newtonsches Axiom wird gefordert:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \text{„actio = reactio“} \quad (3.3)$$

Wir werden später auf dieses Axiom zurückkommen.

In einem komplizierteren System ohne äußere Kräfte ist also

$$\sum_{ij} \vec{F}_{ij} = 0.$$

Wegen $\dot{\vec{p}}_i = \sum_j \vec{F}_{ij}$ folgt daraus:

$$\dot{\vec{p}} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = 0$$

„actio = reactio“ bedeutet also, dass der Gesamtimpuls erhalten bleibt.

3.2. Arbeit, Energie und Leistung

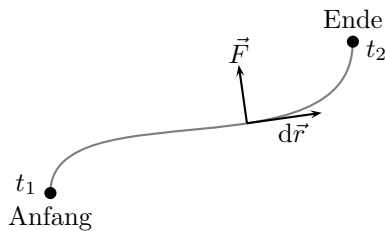
3.2.1. Arbeit

Das bekannte Grundgesetz „Arbeit = Kraft \times Weg“ kann differentiell und vektoriell ausgedrückt werden durch:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3.4)$$

\vec{F} und $d\vec{r}$ sind dabei jeweils Vektoren, die über das Skalarprodukt miteinander verknüpft sind. Somit handelt es sich bei dA um eine skalare Größe.

Die gesamte Arbeit entlang eines Weges ist



$$A = \int_{\text{Anfang}}^{\text{Ende}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3.5)$$

Um dieses Wegintegral auswerten zu können, muss die Bahn parametrisiert werden:

$$\begin{aligned} \vec{r}(\lambda) \quad , \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] \quad (\text{Skalar}) \\ \Rightarrow d\vec{r} &= \left(\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right) d\lambda \\ \Rightarrow A &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \vec{F}(\vec{r}(\lambda)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dabei kann sich die Kraft entlang des Weges ändern. In vielen Fällen bietet sich als skalarer Parameter die Zeit an:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{v}(t) \quad (3.7)$$

Die Einheit der Arbeit ist $\text{Nm} = \text{Ws} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$.

3.2.2. Energie

Wir drücken nun die Kraft durch $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ aus:

$$\begin{aligned} A &= \int_{t_1}^{t_2} dt m\ddot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \\ &= \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left[(\dot{\vec{r}}(t))^2 \right] \\ &= \frac{m}{2} \int_{v_1^2}^{v_2^2} d(v^2) \\ &= \frac{m}{2} v_2^2 - \frac{m}{2} v_1^2 \end{aligned}$$

In der letzten Zeile steht die Differenz der kinetischen Energien, die in der Theoretischen Physik auch gern mit $T_2 - T_1$ bezeichnet wird.

Merke:

Geleistete Arbeit ist gleich dem Verlust der kinetischen Energie:

$$\boxed{A = T_2 - T_1} \quad (3.8)$$

3.2.3. Leistung

Leistung ist definiert als Arbeit pro Zeiteinheit, also

$$L = \dot{A} \quad (3.9)$$

Nun ist $A = \int dt \vec{F} \cdot \vec{v}$, also

$$L = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (3.10)$$

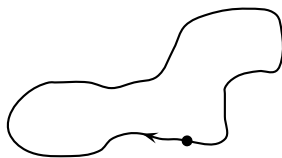
d. h. „Leistung = Kraft \times Geschwindigkeit“.

Die Einheit der Leistung ist $W = \frac{Nm}{s} = \frac{kg \ m^2}{s^3}$.

3.3. Konservative Kräfte

Erste Definition:

Ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ heißt konservativ, wenn es entlang geschlossener Bahnen keine Arbeit leistet:



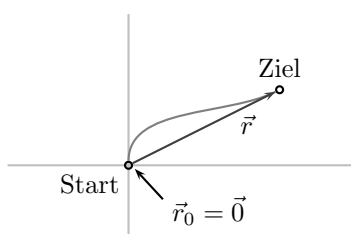
$$\oint dA = 0 \quad (3.11)$$

Beachte:

- Dies gilt für *jede* geschlossene Bahn.
- Entlang der Bahn kann Arbeit durchaus aufgenommen oder abgegeben werden, die Beiträge müssen sich jedoch nach einem Umlauf zu Null ergänzen.

3.3.1. Wegunabhängigkeit — Potential

Da für konservative Kräfte das Integral $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ wegunabhängig ist, kann man ein Potential



$$V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3.12)$$

definieren. Der Startpunkt ist hier frei wählbar. Das Potential ist also bis auf eine Konstante festgelegt.

Es gilt:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})} \quad (3.13)$$

Beweis. Aus Gl. (3.12) folgt:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0) &= - \int_{\text{Start } (\vec{r}_0)}^{\text{Ziel } (\vec{r})} dV = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r} \\ &= - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}V \quad \square \end{aligned}$$

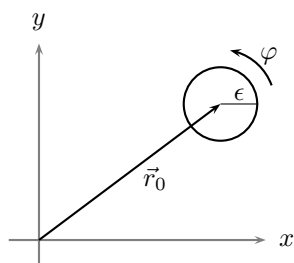
Zweite Definition:

Ein konservatives (d. h. wegunabhängiges) Kraftfeld ist als (negativer) Gradient eines Potentials darstellbar:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})} \quad V \text{ ist Skalar!} \quad (3.14)$$

3.3.2. Differentielle Formulierung

Wir betrachten den \mathbb{R}^2 und darin ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ mit $\oint dA = 0$ entlang *jeder* geschlossenen Bahn.



Wir betrachten nun speziell eine Kreisbahn mit Mittelpunkt \vec{r}_0 und Radius ϵ mit $\epsilon \rightarrow 0$.

$$\vec{r}(\varphi) = \vec{r}_0 + \epsilon \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad ; \quad \frac{d\vec{r}(\varphi)}{d\varphi} = \epsilon \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A &= \oint dA = \oint \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} d\varphi \vec{F}(\vec{r}(\varphi)) \cdot \frac{d\vec{r}(\varphi)}{d\varphi} \quad \Big| \text{ Taylor-Entwicklung} \\ &= \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \overbrace{\vec{F}(\vec{r}_0(\varphi))}^{\text{=const.}} \cdot \frac{d\vec{r}(\varphi)}{d\varphi}}_{=0} + \int_0^{2\pi} d\varphi \epsilon \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} \sin \varphi \right) \cdot \frac{d\vec{r}(\varphi)}{d\varphi} + \dots \end{aligned}$$

Alle Ordnungen müssen verschwinden, also insbesondere die erste!

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \epsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \left(-\frac{\partial F_x}{\partial x} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{\partial F_y}{\partial x} \cos^2 \varphi - \frac{\partial F_x}{\partial y} \sin^2 \varphi + \frac{\partial F_y}{\partial y} \cos \varphi \sin \varphi \right) \\ &= \pi \epsilon^2 \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \stackrel{?}{=} 0, \end{aligned}$$

wobei F_x und F_y die Vektorkomponenten von \vec{F} sind.

Als Bedingung für ein konservatives Kraftfeld erhalten wir also die folgende Differentialgleichung (im \mathbb{R}^2):

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0, \quad (3.15)$$

oder kurz

$$\text{rot } \vec{F} = 0. \quad (3.16)$$

3.3.3. Rotation allgemein

Wir definieren den total antisymmetrischen Tensor ϵ in n Dimensionen:

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} := \begin{cases} 1 & \text{falls } \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \text{ eine gerade Permutation von } \{1, 2, \dots, n\} \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \text{ eine ungerade Permutation von } \{1, 2, \dots, n\} \text{ ist,} \\ 0 & \text{falls } \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \text{ keine Permutation von } \{1, 2, \dots, n\} \text{ ist.} \end{cases} \quad (3.17)$$

Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} n = 2: \quad & \epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1 \\ & \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0 \\ \\ n = 3: \quad & \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \\ & \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1 \\ & \text{alle anderen} = 0 \end{aligned}$$

Die Rotation eines Vektorfeldes in n Dimensionen ist ein $(n-2)$ -dimensionaler Tensor:

$$\left(\text{rot } \vec{F} \right)_{i_1 i_2 \dots i_{n-2}} = \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{n-2} i_{n-1} i_n} \partial_{i_{n-1}} F_{i_n} \quad (3.18)$$

In 2 Dimensionen ist $\text{rot } \vec{F}$ also ein Skalar:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \epsilon_{i_1 i_2} \partial_{i_1} F_{i_2} \\ &= \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{aligned} \quad (3.19)$$

Dies ist gerade das Ergebnis von oben.

In 3 Dimensionen ist $\text{rot } \vec{F}$ ein Vektor:

$$\begin{aligned} \left(\text{rot } \vec{F} \right)_{i_1} &= \epsilon_{i_1 i_2 i_3} \partial_{i_2} F_{i_3} \\ \Rightarrow \text{rot } \vec{F} &= \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix} \\ &= \vec{\nabla} \times \vec{F} \end{aligned} \quad (3.20)$$

(In 4 Dimensionen wäre $\text{rot } \vec{F}$ ein Tensor 2. Stufe.)

Für Newtons Physik in 3 Dimensionen gilt daher auch die folgende Definition.

Dritte Definition:

Ein Kraftfeld ist konservativ, wenn es wirbelfrei ist, d. h.

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}. \quad (3.21)$$

3.3.4. Kräfte in der relativistischen Mechanik

Obwohl der Kraftbegriff, insbesondere der Gravitationskraft, später in der Allgemeinen Relativitätstheorie umgedeutet wird, ist es oft üblich, Viererkräfte analog zu Newtonschen Kräften zu postulieren.

Das relativistische Pendant lautet

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{p} = \mathbf{f}. \quad (3.22)$$

Dabei ist \mathbf{f} der Viererkräftevektor, auch Minkowski-Kraft genannt. Sie hat die Komponenten

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f^0 \\ f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix} = \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} L/c \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Dabei ist $L = \frac{d}{d\tau}E$ die Energieänderung des Teilchens pro Eigenzeit, also die Leistung.

Die Viererkräfte steht immer „senkrecht“ auf der Vierergeschwindigkeit:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{u} \cdot \frac{d}{d\tau}m\mathbf{u} = \frac{1}{2}m \frac{d}{d\tau} \underbrace{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}_{=c^2} = 0$$

In dieser Eigenschaft erhält man das Newtonsche Gesetz „Arbeit = Kraft \times Weg“ bzw. „Leistung = Kraft \times Geschwindigkeit“:

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} &= u^\mu f_\mu = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \cdot \gamma \begin{pmatrix} L/c \\ -\vec{F} \end{pmatrix} = \gamma^2 (L - \vec{v} \cdot \vec{F}) \\ &\Rightarrow L = \vec{v} \cdot \vec{F} \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.4. Potential und Prinzip der kleinsten Wirkung

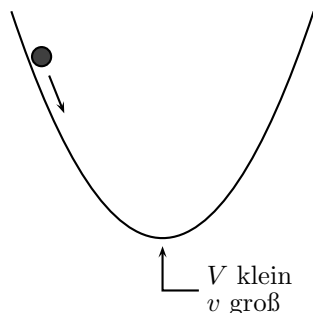
Anschauliche Argumente: Bisher haben wir lediglich ein freies Teilchen mit der gegebenen Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\vec{v}) = \frac{1}{2}mv^2 = T$ (bzw. relativistisch $\mathcal{L}(\mathbf{u}) = -mc\sqrt{u^\mu u_\mu}$) betrachtet. Wegen der Translationsinvarianz im Ort war hier die Lagrange-Funktion nur von der Geschwindigkeit abhängig.

Ein Potential jedoch bricht die Translationsinvarianz durch seine Ortsabhängigkeit. Damit wird die Lagrange-Funktion explizit vom Ort abhängig.

Wie wir sehen werden, ist die kinetische Energie so etwas wie ein Wirkungsverbrauch, während das Potential wie ein Wirkungsgewinn ist; im übertragenen Sinne ist T ein Maß für die „laufenden Kosten“ und V ein Maß für das „Einkommen“. Die Standard-Lagrange-Funktion ist

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}) = T(\vec{v}) - V(\vec{r}) \quad (3.25)$$

bzw. kurz $\mathcal{L} = T - V$. Die Wirkung zu minimieren bedeutet also, die laufenden Kosten T zu minimieren und das Einkommen V zu maximieren.



Regionen, in denen das „Einkommen“ niedrig ist, meidet das System durch Geschwindigkeitserhöhung.

$\mathcal{L} = T - V$ ist sicherlich die einfachste aller möglichen Formen von Lagrange-Funktionen in einem Potential. Gerechtfertigt wird aber dieser Ansatz erst, wenn am Ende die Newtonschen Bewegungsgleichungen korrekt herauskommen.

3.4.1. Variationsrechnung mit Ortsabhängigkeit

Die Aufgabe lautet nun, das Integral über die Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v})$$

zu minimieren. Dabei ist die Lagrange-Funktion jetzt neben der Geschwindigkeit \vec{v} auch noch vom Ort \vec{r} des Teilchens abhängig.

Angenommen, $\vec{r}(t)$ sei die Bahn, für die S minimal ist. Betrachte nun eine Variation

$$\vec{r}(t) \rightarrow \vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \delta\vec{r}(t),$$

wobei die Endpunkte festgehalten werden: $\delta\vec{r}(t_1) = \delta\vec{r}(t_2) = 0$.

$$S \rightarrow S' = S + \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} \delta r_i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} \delta v_i \right\},$$

wobei $\delta v_i = \frac{d}{dt} \delta r_i$ ist. Das Integral soll verschwinden. Wie gewohnt wird der 2. Term partiell integriert,

$$S' = S + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} \right) \delta r_i,$$

so dass δr_i ausgeklammert werden kann. Da dies für alle δr_i gilt, muss gelten:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} = 0} \quad i = 1..3 \quad (3.26)$$

Diese Gleichung ist eine Darstellung der sogenannten Lagrangeschen Gleichungen¹.

3.4.2. Überprüfung von $\mathcal{L} = T - V$

Für ein Teilchen in einem ortsabhängigen Potential gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}) &= \frac{1}{2}mv^2 - V(\vec{r}) \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} &= -\frac{\partial V}{\partial r_i} = F_i \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} &= mv_i = p_i\end{aligned}$$

Damit lauten die Lagrangeschen Gleichungen

$$\begin{aligned}F_i - \dot{p}_i &= 0 \\ \text{bzw. } \vec{F} &= \dot{\vec{p}} \quad \text{in Vektorform.}\end{aligned}$$

Wegen $\vec{p} = m\vec{v}$ ist $\dot{\vec{p}} = m\vec{a}$; wir erhalten also

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Der Ansatz $\mathcal{L} = T - V$ ist in diesem Fall also korrekt.

3.5. Eindimensionale Bewegungen

In einer Dimension sind Wegintegrale eindeutig, d. h., alle ortsabhängigen Kraftfelder sind konservativ. Somit lässt sich die Kraft als Gradient (in einer Dimension also als einfache Ableitung) des Potentials darstellen:

$$F(x) = -\frac{d}{dx}V(x) \quad (3.27)$$

Die Langrange-Funktion lautet:

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x) \quad (3.28)$$

Damit werden die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zu:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x})}{\partial x} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{x}) + \frac{dV(x)}{dx} &= 0 \\ &\Rightarrow m\ddot{x} = F(x)\end{aligned} \quad (3.29)$$

¹Diese werden auch Euler-Lagrange-Gleichungen genannt und beschreiben als Bewegungsgleichung den Lagrange-Formalismus.

Integriert man die Beziehung

$$\begin{aligned} m \frac{d^2}{dt^2} x + \frac{d}{dx} V(x) &= 0 \quad \Big| \int dx \\ \Rightarrow m \frac{d^2}{dt^2} \int dx x + \int dx \frac{d}{dx} V(x) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) &= \text{const}, \end{aligned}$$

so erhält man den Energieerhaltungssatz:

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = T + V = E = \text{const}. \quad (3.30)$$

Man kann den Energieerhaltungssatz benutzen, um zum Beispiel Schwingungsdauern auszurechnen. Dazu lösen wir obige Gleichung nach \dot{x} auf:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \pm \sqrt{\frac{2(E - V(x))}{m}} \\ \Rightarrow dt &= \frac{dx}{\pm \sqrt{\frac{2(E - V(x))}{m}}} \\ \Rightarrow t - t_o &= \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x d\tilde{x} \frac{1}{\sqrt{E - V(\tilde{x})}} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Das Vorzeichen ist so zu wählen, dass die Zeitdifferenz positiv ist.

Beispiel: (Harmonischer Oszillator)

Das folgende Potential beschreibt einen harmonischen Oszillator:

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2 \quad \left([k] = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \right)$$

Umkehrpunkt sei bei $\pm x_0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow E &= \frac{1}{2} k x_0^2 \\ \frac{T}{2} &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{-x_0}^{+x_0} dx \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} k (x_0^2 - x^2)}} = \dots = \sqrt{\frac{m}{k}} \pi \\ \Rightarrow \omega &= \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

3.6. Geschwindigkeitsabhängige Kräfte

Für Kräfte $F(v)$ in einer Dimension, die von der Geschwindigkeit des Teilchens abhängen (wie z. B. Reibungskräfte), gelten die Newtonschen Bewegungsgleichungen:

$$F(v) = ma$$

bzw. $F(\dot{x}) = m\ddot{x}$

Lösung durch Separation der Variablen:

$$dt = \frac{m}{F(v)} dv \quad \Rightarrow \quad t - t_0 = m \int_{v_0}^v \frac{dv'}{F(v')} =: g(v) \quad (3.32)$$

Falls von $g(v)$ die Umkehrfunktion $v = g^{-1}(t)$ gebildet werden kann, ist

$$x(t) = \int g^{-1}(t) dt. \quad (3.33)$$

Beispiel: (Geschwindigkeitsabhängige „Reibung“)

Gegeben sei eine geschwindigkeitsabhängige Kraft $F(v)$:

$$\begin{aligned} F(v) &= -\gamma v \\ \Rightarrow g(v) &= -\frac{\ln v}{\gamma} + \text{const.} & v(t) &= v_0 e^{-\gamma t} \\ \Rightarrow x(t) &= x_0 + v_0 e^{-\gamma t} \end{aligned}$$

Übung: Betrachte $F(v) = -\gamma v^3$.

BEMERKUNG:

Bei Reibung wird das Teilchen in komplexer Weise an andere Teilchen gekoppelt. Der Lagrange-Mechanismus muss hierzu erweitert werden.

3.7. Drehimpuls eines Teilchens

Wir multiplizieren die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

von links mit \vec{r} per Kreuzprodukt:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Mit den Definitionen

$$\vec{l} := \vec{r} \times \vec{p} \quad (\text{Drehimpuls}) \quad (3.34)$$

$$\vec{M} := \vec{r} \times \vec{F} \quad (\text{Drehmoment}) \quad (3.35)$$

erhalten wir

$$\dot{\vec{l}} = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{M}. \quad (3.36)$$

$$\boxed{\dot{\vec{l}} = \vec{M}}$$

Wenn das Drehmoment verschwindet, ist also der Drehimpuls erhalten.

Achtung:

Der gewöhnliche Impuls \vec{p} hängt zwar vom gewählten Inertialsystem ab, nicht aber von der Lage des Ursprungs. Der Drehimpuls dagegen bezieht sich immer um einen bestimmten Punkt.

Das heißt:

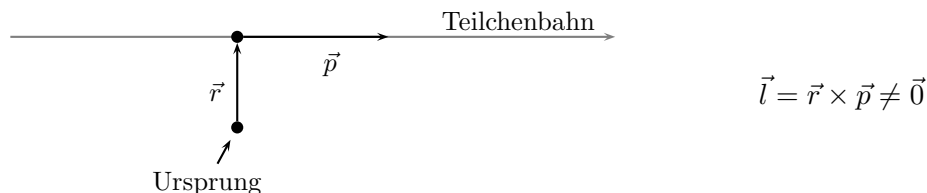
\vec{p} ist invariant unter Verschiebungen $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{a}$, \vec{l} dagegen nicht.

BEMERKUNG:

Drehimpuls hat nicht unbedingt etwas mit einer rotierenden Bewegung zu tun.

Beispiel: (Vorbeifliegendes kräftefreies Teilchen)

Wir betrachten ein Teilchen, auf das keine Kraft wirkt.



Das Teilchen hat einen Drehimpuls, wenn es nicht genau durch den Ursprung fliegt.

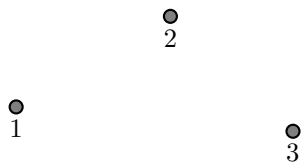
BEMERKUNG:

Analogon in der Relativitätstheorie:

$$l_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\tau} x^\rho p^\tau \quad (3.37)$$

Hier ist der Drehimpuls ein 4×4 -Tensor.

4. Mehrteilchensysteme



Gegeben seien N Teilchen, indiziert durch griechische Indizes α, β . Es gibt N Newtonsche Bewegungsgleichungen:

$$m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha(t) = \vec{F}_\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (4.1)$$

Dabei ist \vec{F}_α die gesamte auf Teilchen α wirkende Kraft. Sie setzt sich zusammen aus einer externen Kraft $\vec{F}_\alpha^{\text{ext}}$ und den von den jeweils anderen Teilchen $\beta \neq \alpha$ verursachten Kräften:

$$\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^{\text{ext}} + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \vec{F}_{\alpha\beta} \quad (4.2)$$

Dabei bezeichnet α den Index des Teilchens, auf das die Kraft wirkt, und β den Index des Teilchens, welches die Kraft verursacht.

Die Kräfte $\vec{F}_{\alpha\beta}$ zwischen den Teilchen sind durch physikalische Wechselwirkungen verursacht. Die beiden bekanntesten sind:

- Gravitationswechselwirkung:

$$\vec{F}_{\alpha\beta} = -\gamma m_\alpha m_\beta \frac{\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|^3} \quad (4.3)$$

(Dabei ist $\gamma \approx 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ die Gravitationskonstante¹.)

- Elektrostatische Coulomb-Wechselwirkung:

$$\vec{F}_{\alpha\beta} = \frac{q_\alpha q_\beta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|^3} \quad (4.4)$$

Die beiden Wechselwirkungen unterscheiden sich nur durch den Vorfaktor, dabei ist die Gravitationswechselwirkung lediglich *bedeutend* schwächer.

¹Unter allen Naturkonstanten ist die Gravitationskonstante diejenige mit der größten relativen Ungenauigkeit. Der hier angegebene Wert bezieht sich auf die Veröffentlichung CODATA 2002, wobei hier für $\gamma = (6,6742 \pm 0,0010) \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ angegeben wird.

Beispiel: (Zwei Elektronen)

Die relativen Größenordnungen der Wechselwirkungen lassen sich berechnen:

$$\begin{aligned}\gamma (m_e)^2 &= 5,537 \cdot 10^{-71} \text{ Nm}^2 \\ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} &= 2,326 \cdot 10^{-28} \text{ Nm}^2\end{aligned}$$

Somit ist die elektrostatische Wechselwirkung etwa 10^{42} mal stärker als die Gravitationswechselwirkung.

Beide Wechselwirkungen erfüllen des 3. Newtonsche Axiom „actio = reactio“. Dies gilt nicht für alle Kräfte, z. B. die Lorentz-Kraft erfüllt das Axiom nicht.

Wir definieren die Gesamtmasse

$$M := \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \quad (4.5)$$

und den Schwerpunkt

$$\vec{R} := \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \quad (4.6)$$

des Teilchensystems sowie die Summe der äußeren Kräfte

$$\vec{F}_{\text{gesamt}}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}. \quad (4.7)$$

Der Schwerpunkt $\vec{R}(t)$ bewegt sich gemäß der Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}M\ddot{\vec{R}}(t) &= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \ddot{\vec{r}}_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \vec{F}_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \\ &= \vec{F}_{\text{gesamt}}^{\text{ext}}.\end{aligned} \quad (4.8)$$

Da sich alle inneren Kräfte $\vec{F}_{\alpha\beta}$ wegen „actio = reactio“ paarweise auslöschen, bewegt sich das Teilchensystem bezüglich seines Schwerpunkts gewissermaßen wie ein einzelnes Teilchen.

Definiert man den Gesamtimpuls

$$\vec{p} = \sum_{\alpha=1}^n \vec{p}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}, \quad (4.9)$$

dann erhält man als Bewegungsgleichung den sogenannten Schwerpunktsatz:

$$\boxed{\dot{\vec{p}} = \vec{F}^{\text{ext}}} \quad (4.10)$$

4.1. Drehimpuls

Wir definieren den Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L} := \sum_{\alpha=1}^N \vec{r}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N l_{\alpha} \quad (4.11)$$

sowie das Gesamtdrehmoment

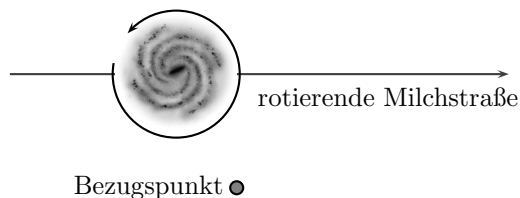
$$\begin{aligned} \vec{M} &:= \sum_{\alpha=1}^N \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha\beta} \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \underbrace{(\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}) \times \vec{F}_{\alpha\beta}}_{=0} \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= \sum_{\alpha=1}^N (\underbrace{\dot{\vec{r}}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha}}_{=0} + \vec{r}_{\alpha} \times \dot{\vec{p}}_{\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha} = \vec{M} \\ &\boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{M}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ohne *äußeres* Drehmoment ist also der Gesamtdrehimpuls des Teilchensystems erhalten.

4.2. Zerlegung des Gesamtdrehimpulses

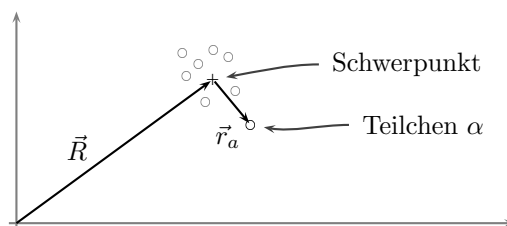


Der Drehimpuls setzt sich zusammen aus dem Bahndrehimpuls des Schwerpunkts und dem Eigendrehimpuls bezüglich des Schwerpunkts.

Die Zerlegung ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_{\alpha} \vec{l}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha}^* + \vec{R}) \times m_{\alpha} (\dot{\vec{r}}_{\alpha}^* + \dot{\vec{R}})\end{aligned}\quad (4.14)$$

Skizze zur Veranschaulichung:



Ausmultipliziert ergeben sich die folgenden vier Terme:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^* \times m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^* + \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^* \times m_{\alpha} \dot{\vec{R}} \\ &\quad + \sum_{\alpha} \vec{R} \times m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^* + \sum_{\alpha} \vec{R} \times m_{\alpha} \dot{\vec{R}}\end{aligned}$$

Der zweite und dritte Term verschwindet wegen

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^* &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} - \vec{R}) = M\vec{R} - M\vec{R} = \vec{0}, \\ \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^* &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\dot{\vec{r}}_{\alpha} - \dot{\vec{R}}) = M\dot{\vec{R}} - M\dot{\vec{R}} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Übrig bleibt:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^* \times m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^* + \sum_{\alpha} \vec{R} \times m_{\alpha} \dot{\vec{R}} \\ &= \sum_{\alpha} l_{\alpha}^* + \vec{R} \times \vec{p}_s\end{aligned}\quad (4.15)$$

Dabei ist

$$\vec{p}_s := M \frac{d}{dt} \vec{R} = M \dot{\vec{R}}\quad (4.16)$$

der sogenannte Schwerpunktsimpuls.

$\sum_{\alpha} l_{\alpha}^*$ ist Gesamtdrehimpuls bezüglich des Schwerpunkts.

4.2.1. Energieerhaltung

Wir nehmen an, dass sich die Kräfte $\vec{F}_{\alpha\beta}$ als Gradienten von zeitunabhängigen Potentialen darstellen lassen:

$$\begin{aligned} F_{\alpha}^{\text{ext}} &= -\vec{\nabla}_{\alpha} V_{\alpha}^{\text{ext}}(\vec{r}_{\alpha}) \\ \vec{F}_{\alpha\beta} &= -\vec{\nabla}_{\alpha} V_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}) \end{aligned}$$

Die gesamte potentielle Energie ist dann

$$V = \sum_{\alpha} V_{\alpha}^{\text{ext}} + \sum_{\alpha < \beta} V_{\alpha\beta}. \quad (4.17)$$

($\alpha < \beta$ dient dabei zur Vermeidung der Doppelzählung der Potentiale.)

Daraus ergibt sich dann für die Änderung der Gesamtenergie des Systems

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt}(T + V) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha} T_{\alpha} + \sum_{\alpha} V_{\alpha}^{\text{ext}} + \sum_{\alpha < \beta} V_{\alpha\beta} \right) \\ &= \sum_{\alpha} \left(m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \ddot{\vec{r}}_{\alpha} - \dot{\vec{r}}_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} - \dot{\vec{r}}_{\alpha} \sum_{\beta} \vec{F}_{\alpha\beta} \right) \\ &= \sum_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \left(m_{\alpha} \ddot{\vec{r}}_{\alpha} - \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} - \sum_{\beta} \vec{F}_{\alpha\beta} \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Der letzte Schritt ergibt sich daraus, dass $m_{\alpha} \ddot{\vec{r}}_{\alpha} - \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} - \sum_{\beta} \vec{F}_{\alpha\beta}$ gerade Teil der für Mehrteilchensysteme angesetzten Newtonschen Bewegungsgleichung ist (vgl. Gl. (4.2)), der dargestellte Term ergibt also per Definition Null.

$$\Rightarrow T + V = E = \text{const.} \quad (4.19)$$

Wir folgern:

Wenn alle auftretenden Kräfte sowohl konservativ sind als auch nicht explizit von der Zeit abhängen, ist die Gesamtenergie erhalten.

Beispiel: (Geladene Teilchen im Schwerfeld)

Wir betrachten elektrisch geladene Teilchen im Schwerfeld der Erde (wie beim Millikan²-Versuch):

$$\begin{aligned} V_{\alpha}^{\text{ext}} &= m_{\alpha} g \vec{e}_z \cdot \vec{r}_{\alpha} \quad \left(\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ V_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha}, \vec{r}_{\beta}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{\alpha}q_{\beta}}{|\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}|} \end{aligned}$$

²Robert Andrews Millikan (* 22. März 1868 in Morrison, Illinois, USA; † 19. Dezember 1953 in San Marino bei Pasadena, Kalifornien, USA), US-amerikanischer Physiker.

Übung: Rechnen Sie die Kräfte aus.

4.2.2. Zerlegung der kinetischen Energie

Die kinetische Energie T des Systems lässt sich folgendermaßen zerlegen:

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_{\alpha} T_{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\dot{\vec{r}}_{\alpha}^{*} + \dot{\vec{R}} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^{*2} + \underbrace{\dot{\vec{R}} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^{*}}_{=0} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{R}}^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^{*2} + \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 \\
 &= \sum_{\alpha} T_{\alpha}^{*} + T_s
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

4.3. Zweikörperproblem mit Zentralkräften

Ansatz:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}_{12} \\
 m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}
 \end{aligned}$$

Schwerpunktsatz:

$$\begin{aligned}
 M \ddot{\vec{R}} &= 0 \\
 \Rightarrow \vec{R}(t) &= \vec{R}(t_0) + \dot{\vec{R}} \cdot (t - t_0)
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

(mit $\dot{\vec{R}} = \vec{v} = \text{const.}$)

Wir definieren:

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &:= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\
 \vec{F} &:= \vec{F}_{12} \\
 \mu &:= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{„reduzierte Masse“})
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}} \tag{4.23}$$

Drehimpuls:

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p}_s + \vec{r} \times \vec{p} \tag{4.24}$$

Dabei bezeichnet \vec{p}_s den Schwerpunktsimpuls und \vec{p} den Relativimpuls: $\vec{p} = \mu \dot{\vec{r}}$.

4.3.1. Zweikörperproblem im Lagrange-Formalismus

$$\mathcal{L}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{m_1}{2} \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{r}}_2^2 - V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \quad (4.25)$$

Symmetrie	Erhaltungsgrößen
Rotation	Drehimpuls
Translation Ort	Schwerpunktimpuls
Translation Zeit	Energie

Wir drücken \mathcal{L} in \vec{R} , \vec{r} , M , μ aus:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad ; \quad \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$$

$$\Rightarrow \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (4.26)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (4.27)$$

Durch elementares Umformen erhalten wir daraus:

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(|\vec{r}|) \quad (4.28)$$

Die sechs Lagrangeschen Gleichungen lauten:

I)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{R}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

II)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

Beide Differentialgleichungen entkoppeln voneinander:

I)

$$M \ddot{R}_i = 0$$

II)

$$\mu \ddot{r}_i = - \frac{\partial V(|\vec{r}|)}{\partial r_i}$$

Man sieht die Entkopplung bereits der Lagrange-Funktion an, denn wir können sie in zwei Summanden aufspalten:

$$\mathcal{L}(\vec{R}, \dot{\vec{R}}, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \mathcal{L}_I(\vec{R}, \dot{\vec{R}}) + \mathcal{L}_{II}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \quad (4.29)$$

Immer, wenn eine solche additive Aufspaltung möglich ist, entkoppeln die entsprechenden Teilsysteme.

Zur Lösung der durch \mathcal{L}_{II} beschriebenen Relativbewegung ist es sinnvoll, Zylinderkoordinaten einzuführen. Da wir aber wissen, dass eine ebene Bewegung entsteht, setzen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z = 0$, d. h., das Teilchen bewegt sich in der xy -Ebene.

In der xy -Ebene benutzen wir wegen der zu erwartenden Rotationsinvarianz nun Polarkoordinaten:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r(t) \cos \varphi(t) \\ r(t) \sin \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Lagrange-Funktion \mathcal{L}_{II} lautet dann:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{r}}^2 &= \dot{r}^2 \cos^2 \varphi - 2r\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi \\ &\quad + \dot{r}^2 \sin^2 \varphi + 2r\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi \\ &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \\ |\vec{r}| &= r \\ \Rightarrow \mathcal{L}_{II} &= \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r) \end{aligned}$$

Die beiden Bewegungsgleichungen lauten:

$$(A) \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{II}}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_{II}}{\partial \dot{\varphi}} = 0$$

$$(B) \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{II}}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_{II}}{\partial \dot{r}} = 0$$

Explizit lauten sie (beide gekoppelt):

$$(A) \quad \frac{d}{dt} (\mu r^2 \dot{\varphi}) = 0$$

(B)

$$\mu r \dot{\varphi}^2 - \frac{dV}{dr} - \mu \ddot{r} = 0$$

Folglich ist $\mu r^2 \dot{\varphi}$ zeitlich konstant. In der Tat ist dies gerade der Relativdrehimpuls L :

$$\mu r^2 \dot{\varphi} = L = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (z = 0) \quad (4.30)$$

Aufgelöst nach $\dot{\varphi}$ ist dies der sogenannte Flächensatz des Zweikörperproblems:

$$\boxed{\dot{\varphi}(t) = \frac{L}{\mu r^2(t)}} \quad \text{„In gleichen Zeiten werden gleiche Flächen überstrichen.“} \quad (4.31)$$

Wir können diesen Sachverhalt benutzen, um (B) von (A) zu entkoppeln, indem wir $\dot{\varphi}$ einsetzen. Dadurch erhalten wir die sogenannte Radialgleichung:

(B)

$$\mu \ddot{r} = \frac{L^2}{\mu r^3} - \frac{dV}{dr} \quad (4.32)$$

4.3.2. Energieerhaltung

\mathcal{L} hängt nicht explizit von der Zeit ab ($\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$), also muss die Energie erhalten sein:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{II}} &= \underbrace{\frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)}_T - V(r) \\ \Rightarrow E &= \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Auch hier setzen wir wieder das Ergebnis von (A), also die Drehimpulserhaltung, ein:

$$\boxed{E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)} \quad (4.34)$$

Kinetische Energie
der Relativbewegung
„Zentrifugalpotential“
(gehört eigentlich zu T !)
Potential

Wir definieren das effektive Potential

$$V_{\text{eff}}(\vec{r}) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \quad (4.35)$$

und können uns dann die Radialbewegung in diesem eindimensionalen effektiven Potential vorstellen (vgl. auch Kurvendiskussion im Böhm-Skript, Abschnitt 1.7.3 „Zweikörperproblem mit Zentralkräften“, Seite 22).

4.3.3. Lösung der Bewegungsgleichung

Aus obiger Gleichung ergibt sich:

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}} \sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}} \quad (4.36)$$

Durch Separation und Integration der Variablen erhalten wir $t(r)$:

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^r dr \frac{1}{\sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}}} \quad (4.37)$$

Davon ist die Umkehrfunktion zu bilden und man erhält (wenigstens im Prinzip) $r(t)$.

Damit ist man noch nicht ganz fertig, sondern man muss zur Bestimmung von $r(\varphi)$ den Erhaltungssatz benutzen:

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{L}{\mu r^2} dt = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dt}{dr} dr = \frac{L}{\mu r^2 \dot{r}} dr \\ \Rightarrow \varphi - \varphi_0 &= \pm \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^r dr \frac{1}{r^2 \sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}}} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Wir lösen das nun mit $V(r) = -k/r$ (vgl. ebenfalls Böhm-Skript):

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \pm \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E + \frac{k}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2}}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Substitution:} \\ x = \frac{1}{r}, \quad dr = -r^2 dx \end{array} \right. \\ &= \mp \int dx \frac{1}{\sqrt{-x^2 + \frac{2\mu k}{L^2} x + \frac{2\mu E}{L^2}}} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Nach Bronstein (mit $a < 0$, $4ac - b^2 < 0$):

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} &= -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \left(\frac{b + 2ax}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right) + C_1 \\ &= -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arccos \left(-\frac{b + 2ax}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right) + C_2 \end{aligned}$$

Wir setzen ein:

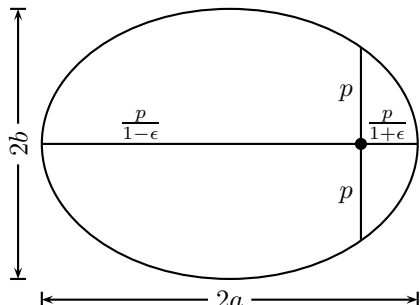
$$a = -1 \quad ; \quad b = \frac{2\mu k}{L^2} \quad ; \quad c = \frac{2\mu E}{L^2}$$

Und wir erhalten:

$$\varphi(r) = \pm \arccos \left(-\frac{x - \frac{\mu k}{L^2}}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \frac{\mu^2 k^2}{L^4}}} \right) \quad (4.40)$$

Setzt man nun die Substitution $x = 1/r$ wieder ein und löst anschließend nach r auf, so erhält man:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi} \quad (\text{Polargleichung, Kegelschnitt}) \quad (4.41)$$



$$p = \frac{L^2}{\mu k} \quad (\text{Höhe über Brennpunkt}) \quad (4.42)$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}} \quad (\text{Exzentrizität}) \quad (4.43)$$

Bei Betrachtung dieses Ergebnisses kann festgestellt werden:

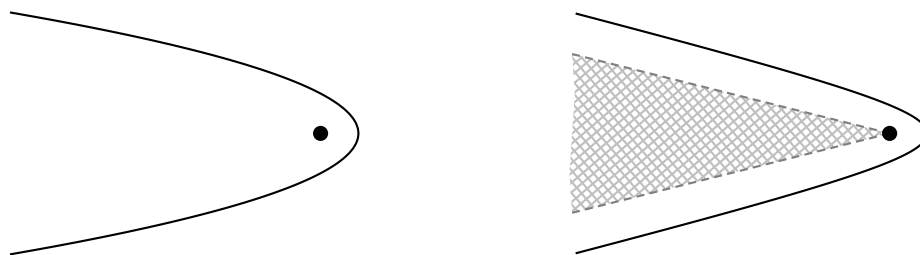
- Bei $E < -\frac{\mu k^2}{2L^2}$ gibt es keine Lösung.
- Bei $E = -\frac{\mu k^2}{2L^2}$ ist $\epsilon = 0$, dies ergibt eine Kreisbahn mit Radius $p = \frac{L^2}{\mu k}$.
- Im Bereich $-\frac{\mu k^2}{2L^2} < E < 0$ ist $0 < \epsilon < 1$. Die jeweilige Bahn ist eine Ellipse.

Für die beiden Halbachsen der Ellipse gilt:

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{1 - \epsilon} + \frac{p}{1 + \epsilon} \right) = \frac{p}{1 - \epsilon^2} \quad (4.44)$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \quad (\text{vgl. Übungsaufgabe}) \quad (4.45)$$

- Bei $E = 0$ ergibt sich eine Parabelbahn, deren Bogen auch in unendlich großer Entfernung noch gekrümmt bleibt.
- Bei $E > 0$ ergibt sich eine Hyperbelbahn, welche asymptotisch geradlinig wird und den schraffierten Raumwinkelbereich nicht betritt.



BEMERKUNG: (Geschlossene Bahnen)

Nur in den Potentialen $V = -\frac{k}{r}$ und $V = \frac{1}{2}kr^2$ sind die Bahnen periodisch geschlossen.

Umlaufdauer

$$\begin{aligned}
T &= \int_0^T dt = \int_0^A \frac{dt}{dA} dA & \left| dA = \frac{1}{2} r^2 d\varphi = \frac{L}{2\mu} d\varphi \right. \\
&= \frac{2\mu}{L} \int_0^A dA = \frac{2\mu}{L} A
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Für Ellipsen gilt:

$$\begin{aligned}
A &= \pi ab = \pi \frac{p^2}{(1-\epsilon^2)^{3/2}} = \pi \sqrt{pa}^{3/2} \\
a &:= \frac{p}{1-\epsilon^2} & b &:= \frac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}} = \sqrt{pa} \\
\Rightarrow T &= \frac{2\mu}{L} \pi \sqrt{\frac{L^2}{\mu k}} a^{3/2} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} a^{3/2}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

BEMERKUNG:

Dieser letzte Ausdruck für T ist nun nicht mehr von L abhängig.

Drittes Keplersches Gesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbsachsen.

$$\boxed{T^2 \propto a^3} \tag{4.48}$$

BEMERKUNG: (Skaleninvarianz)

Das dritte Keplersche Gesetz lässt sich ohne explizite Lösung direkt von der Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{k}{r} \tag{4.49}$$

ablesen. Dazu fordern wir, dass sich \mathcal{L} unter einer Reskalierung

$$\begin{aligned}
\vec{r} &\rightarrow \vec{r}' := \Lambda \vec{r} & (\Lambda \in \mathbb{R} \text{ beliebig}) \\
t &\rightarrow t' := \Lambda^z t & (z \text{ zu bestimmen})
\end{aligned}$$

nur um einen Faktor ändert, d. h.

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' := \Lambda^\chi \mathcal{L} \quad (\chi \text{ zu bestimmen})$$

Ist dies der Fall, so ist $\vec{r}'(t')$ auch eine Lösung.

Unter der Transformation geht Gl. (4.49) über in

$$\Lambda^\chi = \frac{1}{2} \mu \Lambda^{2-2z} \dot{r}^2 + \Lambda^{-1} \frac{k}{r} \quad (4.50)$$

Damit das für alle Λ korrekt ist, muss gelten:

$$\chi = -1 \quad ; \quad z = -\frac{3}{2}$$

Folglich ist der Quotient $\frac{t^{3/2}}{r}$ unter Reskalierung invariant.

$$\Rightarrow T^3 \propto a^2 \quad (4.51)$$

BEMERKUNG:

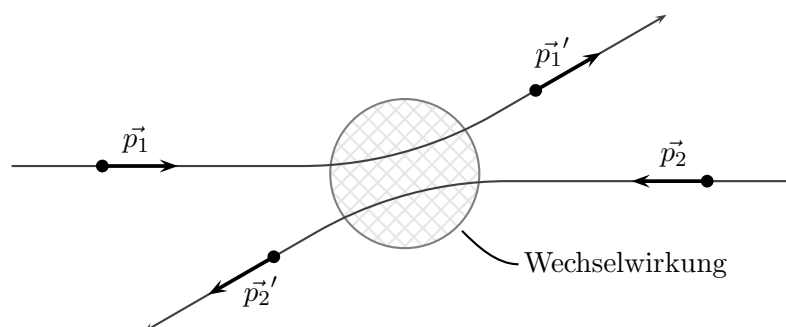
Für den harmonischen Oszillator können wir analog verfahren.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} k r^2 \\ \Rightarrow \Lambda^\chi \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \mu \Lambda^{2-2z} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} k \Lambda^2 r^2 \\ \Rightarrow \chi &= 2 \quad ; \quad z = 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow Unter Reskalierung bleibt die Zeit invariant, also $T = \text{const.}$

4.4. Streuung

Wir betrachten *im Schwerpunktsystem* (*) zwei Teilchen, die aneinander streuen.



Der Gesamtimpuls bleibt erhalten:

$$\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = \vec{p}_1'^* + \vec{p}_2'^* = 0 \quad (4.52)$$

Ferner sei der Stoß elastisch, d. h., die Energie sei erhalten:

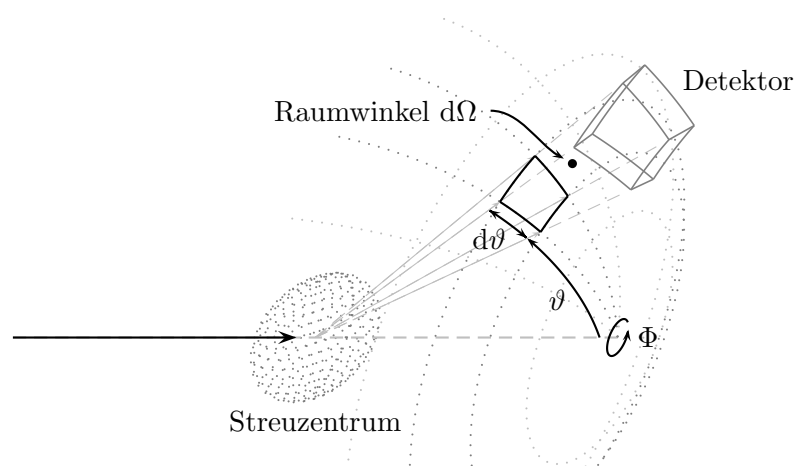
$$\frac{\vec{p}_1^{*2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^{*2}}{2m_2} = \frac{\vec{p}_1'^{*2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2'^{*2}}{2m_2} \quad (4.53)$$

Wegen $|\vec{p}_1^*| = |\vec{p}_2^*|$ und $|\vec{p}_1'^*| = |\vec{p}_2'^*|$ kann man auch schreiben:

$$\begin{aligned} p_1^{*2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) &= p_1'^{*2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \\ \Rightarrow |\vec{p}_1^*| &= |\vec{p}_1'^*| \\ |\vec{v}_1^*| &= |\vec{v}_1'^*| \end{aligned} \quad (4.54)$$

⇒ Der Betrag der Geschwindigkeit gemessen im Schwerpunktsystem ändert sich bei einem elastischen Stoß nicht.

4.4.1. Wirkungsquerschnitt



Raumwinkel (entspricht einem Flächenelement auf der Einheitskugel):

$$d\Omega = \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\Phi \quad (4.55)$$

Die Anzahl der in diese Richtung $d\Omega$ gestreuten Teilchen pro Zeiteinheit wird proportional zur Stromdichte der einfallenden Teilchen sein:

$$\frac{\text{Teilchen in } d\Omega}{\text{Sekunde}} = d\sigma(\vartheta, \Phi) \frac{\text{einlaufende Teilchen}}{\text{Sekunde} \cdot \text{Fläche}} \quad (4.56)$$

BEMERKUNG: (bzgl. $d\sigma(\vartheta, \Phi)$)

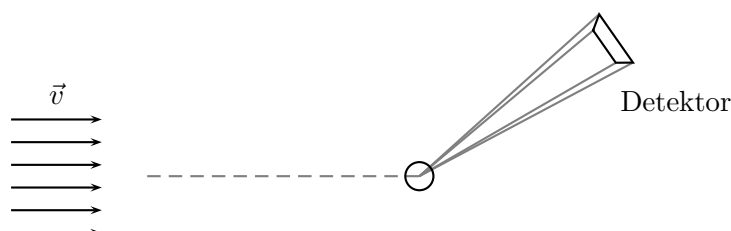
- $d\sigma$ ist ein Proportionalitätsfaktor, der sogenannte „differentielle Wirkungsquerschnitt“ (engl. differential cross section).
- $d\sigma$ hat die Dimension einer Fläche.
- In der Regel hängt $d\sigma$ nicht von Φ ab.

4.4.2. Totaler Wirkungsquerschnitt

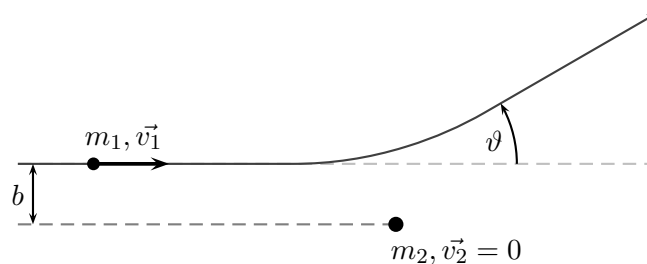
$$\begin{aligned}
 \sigma &:= \int d\sigma = \int_{\text{Kugel}} \frac{d\vartheta}{d\Omega} d\Omega \\
 &= \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{d\Omega} \\
 &= 2\pi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{d\Omega} \tag{4.57}
 \end{aligned}$$

Der totale Wirkungsquerschnitt σ hat die Dimension einer Fläche, und lässt sich vorstellen als die Fläche einer Zielscheibe.

Im Experiment hat man einen Strom parallel einlaufender Teilchen.



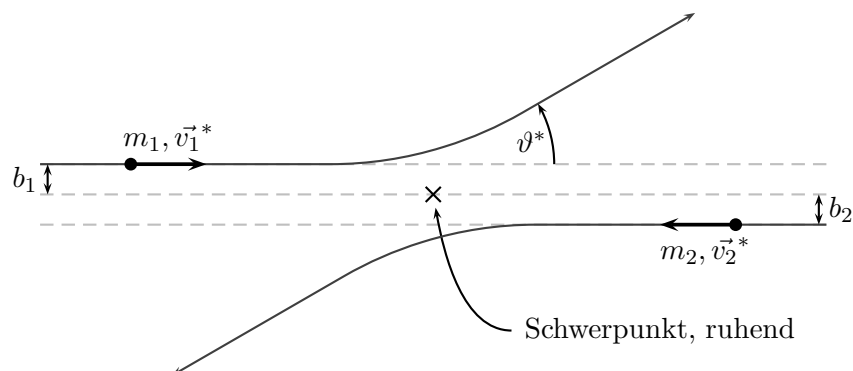
Technisch macht man das mit einer dünnen Folie (Rutherford³), so dass jedes Teilchen statistisch nur einmal gestreut wird. Ein einzelnes sich näherndes Teilchen wird durch seinen Stoßparameter b charakterisiert:



Der Drehimpuls von Teilchen 1 im Laborsystem ist $L = bm_1v_1$ (vgl. Beispiel auf Seite 39). Um den Wirkungsquerschnitt auszurechnen, muss man im Schwerpunktsystem (engl. center of mass system, CM-System) arbeiten.

³Sir Ernest Rutherford, 1. Baron Rutherford of Nelson, OM (* 30. August 1871 in Brightwater bei Nelson/Neuseeland; † 19. Oktober 1937 in Cambridge), neuseeländischer Atomphysiker englischer Abstammung.

Dabei ist zu beachten, dass sich ϑ^* im Schwerpunktsystem von ϑ im Laborsystem unterscheidet:



Weiterhin sind die Impulse hier entgegengesetzt:

$$\begin{aligned} m_1 v_1^* &= -m_2 v_2^* \\ \text{also: } m_1 |\vec{v}_1^*| &= m_2 |\vec{v}_2^*| \end{aligned} \quad (4.58)$$

Der Drehimpuls ist

$$\begin{aligned} L &= b_1 m_1 v_1^* + b_2 m_2 v_2^* \\ &= (b_1 + b_2) m_1 v_1^* \\ &= b m_1 v_1^*. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Die kinetischen Energien der Teilchen sind

$$E_1^* = \frac{m_1}{2} v_1^{*2} \quad ; \quad E_2^* = \frac{m_2}{2} v_2^{*2}$$

$$\text{Gesamtenergie:} \quad E^* = E_1^* + E_2^* \quad (4.60)$$

$$\text{Es gilt wegen Gl. (4.58):} \quad E_1^* m_1 = E_2^* m_2 \quad (4.61)$$

Aus Gl. (4.60) und Gl. (4.61) folgt:

$$\begin{aligned} E_1^* &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} E^* = \frac{\mu}{m_1} E^* \\ E_2^* &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} E^* = \frac{\mu}{m_2} E^* \end{aligned}$$

Den Drehimpuls können wir also schreiben als

$$L = b m_1 v_1^* = b m_1 \sqrt{\frac{2E_1^*}{m_1}} = b \sqrt{2\mu E^*}. \quad (4.62)$$

Ziel ist es also, bei einem gegebenen Potential den Streuwinkel $\vartheta(b)$ im CM-System auszurechnen, um darüber den Winkel $\vartheta^*(b)$ im Laborsystem zu bestimmen:

$$\begin{aligned}\vartheta^*(b) &= \pi - 2\Delta\varphi^* = \pi - \frac{2L}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E^* - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}}} \\ &= \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{V(r)}{E^*} - \frac{b^2}{r^2}}}\end{aligned}\quad (4.63)$$

Sobald man diese Funktion ausgerechnet hat, erhält man den Wirkungsquerschnitt:

$$\begin{aligned}2\pi b I db &= -2\pi \sigma(\vartheta^*) \sin \vartheta^* d\vartheta^* I \\ (\text{sprich: Strom im Ring } b..b + db &= -\text{Strom im Detektorkranz } \vartheta..\vartheta + d\vartheta) \\ \Rightarrow \sigma(\vartheta^*) &= -\frac{b}{\sin \vartheta^*} \frac{db}{d\vartheta^*}\end{aligned}\quad (4.64)$$

Wie aus dieser letzten Gleichung Gl. (4.64) ersichtlich wird, benötigt man zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts wegen $\frac{db}{d\vartheta^*}$ noch die Funktion $b(\vartheta^*)$, also die Umkehrfunktion von $\vartheta^*(b)$ aus Gl. (4.63).

4.4.3. Rutherford-Streuung $V(r) = +\frac{k}{r}$

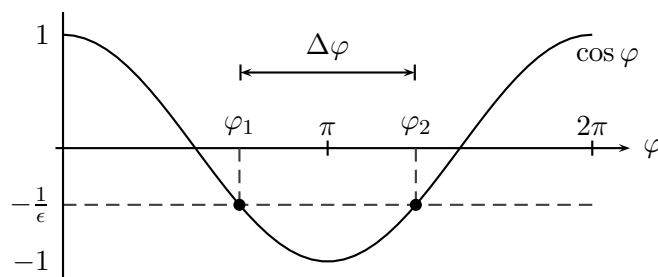
Für diesen Fall hatten wir ausgerechnet (vgl. Abschnitt 4.3.3):

$$\begin{aligned}r(\varphi) &= \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi} \\ p &= \frac{L^2}{\mu k} \quad ; \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E^* L^2}{\mu k^2}} > 1\end{aligned}$$

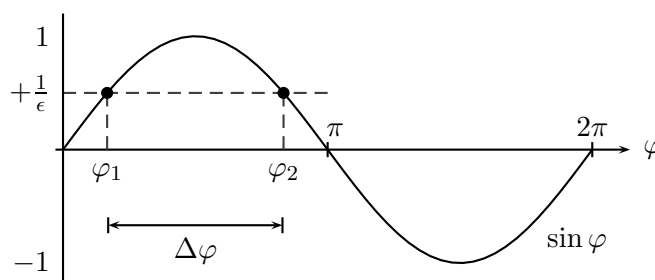
Für $r = \infty$ muss der Nenner gegen Null gehen, also:

$$\begin{aligned}1 + \epsilon \cos \varphi &= 0 \\ \Rightarrow \varphi_{1,2} &= \arccos\left(-\frac{1}{\epsilon}\right)\end{aligned}\quad (4.65)$$

Graphisch dargestellt sieht das so aus:



Das kann man auch ausdrücken als:



Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \vartheta^* &= 2 \arcsin\left(\frac{1}{\epsilon}\right) = 2 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2E^*L^2}{\mu k^2}}}\right) \\
 &= 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{\mu k^2}{2E^*L^2}}\right) \quad | \quad L^2 = b^2 2\mu E^* \\
 &= 2 \arctan\left(\frac{k}{2E^*b}\right) \tag{4.66}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow b(\vartheta^*) &= \frac{k}{2E^*} \frac{1}{\tan \frac{\vartheta^*}{2}} \\
 \sigma(\vartheta^*) &= -\frac{b(\vartheta^*)}{\sin \vartheta^*} \frac{db(\vartheta^*)}{d\vartheta^*} \quad (\text{siehe oben}) \\
 &= +\frac{k^2}{4E^{*2}} \left(\frac{1}{\sin \vartheta^* \tan \frac{\vartheta^*}{2}} \frac{d}{d\vartheta^*} \frac{1}{\tan \frac{\vartheta^*}{2}} \right) \tag{4.67}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{\sigma(\vartheta^*, E^*) = \frac{k^2}{16E^{*2} \sin^4 \frac{\vartheta^*}{2}}} \quad (\text{gültig im CM-System}) \tag{4.68}$$

Merke:

Im Fall der Rutherford-Streuung gilt:

$$\text{Rutherford-WQS} \propto \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta^*}{2}} \tag{4.69}$$

Um den Steuwinkel ϑ im Laborsystem auszurechnen, muss ϑ^* noch in ϑ umgerechnet werden. Eine ausführliche Rechnung findet sich dazu im Skript von M. Böhm. Bei annähernd gleichen Massen lautet das Ergebnis beispielsweise:

$$\sigma(\vartheta, E) = \frac{k^2 \cos(2\vartheta)}{E^2 \sin^2 \left(\frac{\vartheta}{2}\right)} \tag{4.70}$$

Der totale Wirkungsquerschnitt (WQS):

$$\begin{aligned}\sigma &= \int \sigma(\vartheta, E) \, d\Omega \\ &= 2\pi \int \underbrace{\sigma(\vartheta, E) \sin \vartheta}_{\approx \vartheta^{-3} \text{ für kleine } \vartheta} \, d\vartheta \\ &= \infty\end{aligned}\tag{4.71}$$

Das ist plausibel, denn jedes Teilchen, soweit es auch entfernt sein mag, wird im Coulomb-Potential gestreut. Endliche totale WQS erhält man nur bei Potentialen *endlicher* Reichweite.

5. Beschleunigte Bezugssysteme

5.1. Rotierende Bezugssysteme

5.1.1. Allgemeine Rotationen

Wir kennen bereits die Rotationsmatrix. Beispielsweise ist

$$R_{xy}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

eine Rotation in der xy -Ebene.

Wir haben auch gesehen, dass man $R(\varphi)$ als Matrixexponentialfunktion eines Generators schreiben kann (vgl. Anhang A.2):

$$\begin{aligned} R_{xy} &= \exp(\varphi G_{xy}) \\ G_{xy} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Dieser Generator erfüllt die Beziehungen

$$G_{xy}^\dagger = -G_{xy} \quad (\text{Antisymmetrie}) \quad (5.3)$$

$$G_{xy}^3 = -G_{xy} \quad (\text{Drehgenerator}) \quad (5.4)$$

Wir rechnen nun aus:

$$\begin{aligned} \exp(\varphi G) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \varphi^k G^k && |(\text{aufspalten}) \\ &= \mathbb{1} + \sum_{k=2,4,6,\dots} \frac{\varphi^k}{k!} G^k + \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{\varphi^k}{k!} G^k \\ &= \mathbb{1} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\varphi^{2r}}{(2r)!} G^{2r} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\varphi^{2r+1}}{(2r+1)!} G^{2r+1} \end{aligned}$$

Exkurs: Was ist eine „Algebra“?

- Für Physiker wird eine Algebra durch eine Menge von Buchstaben A, B, \dots erzeugt.
- Aus den Buchstaben werden Wörter erzeugt, z. B. $A, B, AB, A^2, B^2, B^3A, \dots$ und $\mathbb{1}$. Hierbei wird die Reihenfolge berücksichtigt.
- Der Raum aller Wörter wird durch algebraische Relationen, z. B. $AB = BA$, eingeschränkt.
- Die verbleibenden Wörter spannen einen linearen Raum (Vektorraum) auf.

In unserem Fall:

- nur ein einziger Buchstabe: G
 - Wörter: $\mathbb{1}, G, G^2, G^3, G^4, \dots$
 - algebraische Relation: $G^3 = -G$
- ⇒ Wörter: $\mathbb{1}, G, G^2$
 ⇒ Wortraum: $\lambda \cdot \mathbb{1} + \mu G + \nu G^2$ (dreidimensional)

An dieser Stelle setzen wir nun unsere algebraische Relation $G^3 = -G$ ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \exp(\varphi G) &= \mathbb{1} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\varphi^{2r}}{(2r)!} (-1)^{r-1} G^2 + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\varphi^{2r+1}}{(2r+1)!} (-1)^r G \\ &= \mathbb{1} - (\cos \varphi - 1) G^2 + (\sin \varphi) G \end{aligned} \quad (5.5)$$

Dies ist eine darstellungsfreie Rechnung, in der wir nur Gebrauch von der algebraischen Relation $G^3 = -G$ gemacht haben. Insbesondere ist $\exp(2\pi n G) = \mathbb{1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

BEMERKUNG:

Eine mögliche Darstellung ist $G = i$, denn $G^3 = i^3 = i^2 i = -i = -G$ erfüllt genau die algebraische Relation. Für diesen Fall ist

$$\exp(i\varphi) = 1 + i \sin \varphi + \cos \varphi - 1 = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (5.6)$$

Wir haben also gezeigt: Aus $G^3 = -G$ folgt

$$\exp(\varphi G) = \mathbb{1} + (\sin \varphi) G + (1 - \cos \varphi) G^2.$$

Die andere Relation $G^\dagger = -G$ stellt sicher, dass $\exp(\varphi G)$ eine orthogonale Abbildung ist, d. h.

$$\exp(\varphi G)^\dagger = \exp(\varphi G)^{-1}. \quad (5.7)$$

In der Tat ist

$$\begin{aligned}\exp(\varphi G)^\dagger \exp(\varphi G) &= \exp(-\varphi G) \exp(\varphi G) \\ &= \exp(-\varphi G + \varphi G) = \mathbb{1}.\end{aligned}\quad (5.8)$$

Behauptung

Eine Rotation um die Drehachse \vec{e} mit $|\vec{e}| = 1$ wird von dem Generator $G_{\vec{e}}$ mit folgender Matrixdarstellung erzeugt:

$$(G_{\vec{e}})_{ij} = -\epsilon_{ijk} e_k \quad (5.9)$$

Zu zeigen sind also die folgenden Gleichungen:

$$(a) \quad G^3 = -G \quad (5.10)$$

$$(b) \quad G^T = -G \quad (5.11)$$

$$(c) \quad \exp(\varphi G) \vec{e} = \vec{e} \quad (\text{Invarianz der Drehachse}) \quad (5.12)$$

BEMERKUNG:

Diese Definition ist mit der Drehung um die z -Achse aus Gl. (5.1) verträglich:

$$\begin{aligned}\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\Rightarrow -(G_{xy})_{12} = +(G_{xy})_{21} = 1 \\ &\Rightarrow (G_{xy})_{ij} = \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \exp(\varphi G_{xy})_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & \\ \sin \varphi & \cos \varphi & \\ & & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (5.13)$$

Beweis

zu (a), Gl. (5.10):

$$(G_{\vec{e}}^2)_{ij} = e_i e_j - \delta_{ij} \quad (\text{vgl. Übungsaufgabe})$$

$$(G_{\vec{e}}^3)_{ij} = +\epsilon_{ijk} e_k = (-G_{\vec{e}})_{ij} \quad (\text{vgl. Übungsaufgabe})$$

zu (b), Gl. (5.11):

$$\begin{aligned}(G_{\vec{e}}^\dagger)_{ij} &= (G_{\vec{e}}^T)_{ij} = (G_{\vec{e}})_{ji} \\ &= -\epsilon_{ijk} e_k = \epsilon_{ijk} e_k \\ &= -(G_{\vec{e}})_{ij} \\ \Rightarrow G_{\vec{e}}^\dagger &= -G_{\vec{e}}\end{aligned}$$

zu (c), Gl. (5.12):

$$\begin{aligned}(G_{\vec{e}}\vec{e})_i &= -(\epsilon_{ijk}e_k)e_j \\ &= -\epsilon_{ijk}e_je_k = 0 \\ \Rightarrow \exp(\varphi G_{\vec{e}})\vec{e} &= \mathbb{1}\vec{e} = \vec{e}\end{aligned}$$

Somit ist die Drehachse \vec{e} invariant.

BEMERKUNG:

Für einen beliebigen Vektor \vec{a} kann man schreiben:

$$\begin{aligned}(G\vec{e})_i &= (\epsilon_{ijk}e_k)a_j & (5.14) \\ &= -\epsilon_{ikj}e_ka_j = -(\vec{e} \times \vec{a})_i \\ \text{also: } G\vec{a} &= -\vec{e} \times \vec{a} \\ \text{analog: } G^2\vec{a} &= \vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{a})\end{aligned}$$

Häufig beschreibt man bei gleichförmig rotierenden Objekten $\varphi = \omega t$ sowohl die Lage der Drehachse als auch die Winkelgeschwindigkeit durch einen einzigen Vektor $\vec{\omega} := \omega\vec{e}$,

$$\begin{aligned}\text{also } \omega &= |\vec{\omega}|, & (5.15) \\ \vec{e} &= \frac{\vec{\omega}}{\omega}.\end{aligned}$$

Dann gilt entsprechend:

$$\begin{aligned}\omega G\vec{a} &= -\vec{\omega} \times \vec{a} & (5.16) \\ \omega^2 G^2\vec{a} &= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{a})\end{aligned}$$

Wir betrachten nun ein gleichförmig rotierendes Bezugssystem ($\varphi = \omega t$; $\omega, \vec{e} = \text{const.}$):

$$\vec{r}'(t) = R_{\vec{e}}(\omega t)\vec{r}(t) \quad (5.17)$$

Wir lassen im Folgenden den Index \vec{e} weg, also $\vec{r}' = R\vec{r}$.

$$\begin{aligned}R &= \mathbb{1} + (\sin \omega t) G + (1 - \cos \omega t) G^2 & (5.18) \\ \dot{R} &= \omega ((\cos \omega t) G + (\sin \omega t) G^2) = \omega GR \\ \ddot{R} &= \omega^2 G^2 R\end{aligned}$$

Dann ist:

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{r}}' &= \dot{R}\vec{r} + R\dot{\vec{r}} \\
 &= \omega G R \vec{r} + R\dot{\vec{r}} = \omega G \vec{r}' + R\dot{\vec{r}} \\
 \Rightarrow R\dot{\vec{r}} &= \dot{\vec{r}}' - \omega G \vec{r}' \\
 \\
 \ddot{\vec{r}} &= \ddot{R}\vec{r} + 2\dot{R}\dot{\vec{r}} + R\ddot{\vec{r}} \\
 &= \omega^2 G^2 R \vec{r} + 2\omega G R \dot{\vec{r}} + R\ddot{\vec{r}} \\
 &= \omega^2 G^2 \vec{r}' + 2\omega G \dot{\vec{r}}' - 2\omega^2 G^2 \vec{r}' + R\ddot{\vec{r}} \\
 \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} &= -m\omega^2 G^2 \vec{r}' + 2m\omega G \dot{\vec{r}}' + Rm\ddot{\vec{r}}
 \end{aligned}$$

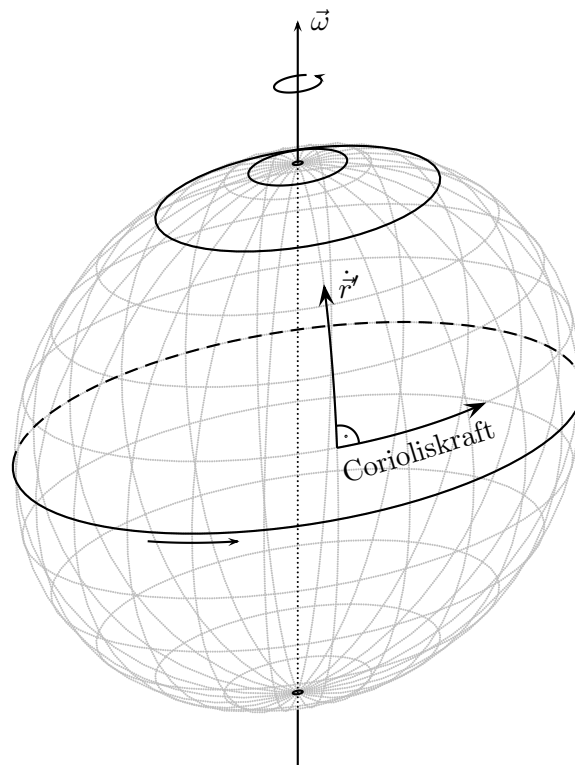
Somit ergibt sich:

$$\vec{F}' = -m\omega^2 G \vec{r}' + 2m\omega G \dot{\vec{r}}' + R\vec{F} \quad (5.19)$$

Dabei sind (mit $\vec{\omega} := \omega \vec{e}$):

$$-m\omega^2 G \vec{r}' = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (\text{Fliehkraft}) \quad (5.20)$$

$$2m\omega G \dot{\vec{r}}' = -2m (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') \quad (\text{Corioliskraft}) \quad (5.21)$$



6. Lagrange-Mechanik

Wir hatten bereits gezeigt, dass die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für ein System aus N Teilchen durch Variation der kleinsten Wirkung abgeleitet werden können:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha,i}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{\alpha,i}} = 0 \quad \begin{array}{ll} \alpha=1..N & \text{Teilchenindex} \\ i=1..3 & \text{Komponente} \end{array} \quad (6.1)$$

Dabei ist $\mathcal{L} = T - V$.

Die Lagrange-Funktion des Sonnensystems ist beispielsweise:

$$\mathcal{L} = \frac{m_{\odot}}{2} \dot{\vec{r}}_{\odot}^2 + \sum_{\alpha} \left(\frac{m_{\alpha}}{2} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^2 + \frac{g m_{\odot} m_{\alpha}}{|\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\odot}|} + \frac{1}{2} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{g m_{\alpha} m_{\beta}}{|\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}|} \right)$$

Wir hatten aber auch gesehen, dass die Lagrangeschen Gleichungen ebenso gut in nicht-kartesischen Koordinaten, z. B. Polarkoordinaten oder Kugelkoordinaten, funktionieren.

Diese Forminvarianz der Lagrangeschen Gleichungen wollen wir jetzt genauer untersuchen. Dazu definieren wir generalisierte Koordinaten:

$$q_s := q_s(\{r_i\}, t) \quad s = 1..N \quad (6.2)$$

Dabei ist $\{r_i\}$ eine Schreibweise und gleichbedeutend mit r_1, r_2, \dots, r_N .

Die Existenz der Umkehrfunktion

$$r_i = r_i(\{q_s\}, t) \quad (6.3)$$

wird vorausgesetzt. Ferner sollen auch Ableitungen (Differentiale) bijektiv abbildbar sein, d. h., auch die Jacobi-Matrix J muss vollen Rang besitzen:

$$|J| = \det(J_{is}) = \det \left[\frac{\partial r_i}{\partial q_s} \right] \neq 0 \quad (6.4)$$

Dann nämlich gilt

$$\dot{r}_i = J_{is} \dot{q}_s + \frac{\partial r_i}{\partial t} \quad (6.5)$$

und umgekehrt

$$\dot{q}_s = (J^{-1})_{si} \dot{r}_i + \frac{\partial q_s}{\partial t}. \quad (6.6)$$

Gegeben sei nun $\mathcal{L}(\{r_i\}, \{\dot{r}_i\}, t)$. Wir definieren:

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\{q_s\}, \{\dot{q}_s\}, t) := \mathcal{L} \left(\left\{ r_i(\{q_s\}, t) \right\}, \left\{ \frac{\partial r_i}{\partial q_r} \dot{q}_r + \frac{\partial r_i}{\partial t} \right\}, t \right) \quad (6.7)$$

Beweis. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass beide Lagrangians nicht explizit von der Zeit abhängen. Wir transformieren nun die Lagrangeschen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_s} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} \frac{\partial r_i}{\partial q_s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_s} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} \frac{\partial r_i}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_s} \right) \\
 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} \frac{\partial r_i}{\partial q_s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_s} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} \right) \frac{\partial r_i}{\partial q_s} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_s} \\
 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} \frac{\partial r_i}{\partial q_s} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} \right) \frac{\partial r_i}{\partial q_s} \\
 &= \frac{\partial r_i}{\partial q_s} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} \right) = 0 \quad \square
 \end{aligned}$$

Die Lagrangeschen Gleichungen sind also forminvariant unter Koordinatentransformationen:

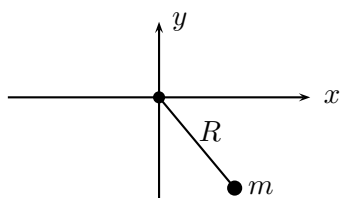
$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} = 0 \iff \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{r}_i} = 0} \quad (6.8)$$

Diese Invarianz ist die eigentliche Stärke des Lagrangeschen Formalismus.

6.1. Zwangsbedingungen

In vielen physikalischen Systemen sind die Freiheitsgrade durch Zwangsbedingungen (d. h. Nebenbedingungen) eingeschränkt.

Beispiel: (Ebenes Pendel)



Die beiden Freiheitsgrade (x, y) der Masse sind eingeschränkt durch

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Man unterscheidet

- holonome Zwangsbedingungen, die sich in der Form

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad (6.9)$$

schreiben lassen (wie z. B. $x^2 + y^2 - R^2 = 0$), und

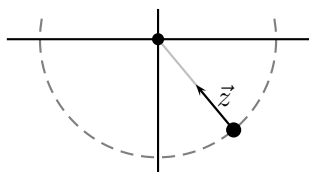
- nichtholonome Zwangsbedingungen, bei denen das nicht der Fall ist (z. B. geschwindigkeitsabhängige Zwangsbedingungen).

Man unterscheidet außerdem zwischen

- zeitunabhängigen (skleronomen) Zwangsbedingungen, und
- zeitabhängigen (rheonomen) Zwangsbedingungen.

Zwangsbedingungen können auch als Ungleichungen formuliert sein.

Die Zwangsbedingungen in Form von Gleichungen haben zur Folge, dass die Bewegung auf eine Hyperfläche eingeschränkt wird.



Um das Teilchen auf der Hyperfläche (Kreisbahn) zu halten, entstehen Zwangskräfte \vec{z} .

6.1.1. d'Alembertsches Prinzip

Zwangskräfte stehen senkrecht auf der Hyperfläche.

In anderen Worten: Bei virtuellen Verrückungen $\delta\vec{r}$, die mit den Zwangsbedingungen verträglich sind, ist

$$\vec{z} \cdot \delta\vec{r} = 0. \quad (6.10)$$

Bei mehreren Zwangskräften gilt dies für die Summe

$$\left(\sum_m \vec{z}_m \right) \cdot \delta\vec{r} = 0. \quad (6.11)$$

BEMERKUNG:

„Virtuelle Verrückungen“ sind infinitesimale Verrückungen bei *festgehaltener* Zeit (im Gegensatz zu realen Verrückungen $\delta\vec{r} = \dot{\vec{r}} dt$, bei denen die Zeit mitbewegt wird). Dieser Unterschied kommt zum Tragen bei explizit zeitabhängigen Zwangsbedingungen.

Ableitung aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung

Das d'Alembertsche Prinzip (Zwangskräfte stehen senkrecht auf Hyperflächen) lässt sich aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung ableiten. Dazu wenden wir die Methode der Lagrange-Multiplikatoren (siehe Anhang A.6) auf das Prinzip der kleinsten Wirkung an.

Gegeben sei die (der Einfachheit halber zeitunabhängige) Wirkung

$$S[\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) \quad (6.12)$$

zusammen mit den Nebenbedingungen:

$$f_\nu(\vec{r}) = 0 \quad \nu = 1..M \quad (6.13)$$

Anwendung der Methode der Lagrange-Multiplikatoren liefert:

$$\tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\left(\mathcal{L}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) + \sum_{\nu=1}^M \lambda_\nu f_\nu(\vec{r}) \right)}_{=: \tilde{\mathcal{L}}} \quad (6.14)$$

Die Variation der Bahn liefert:

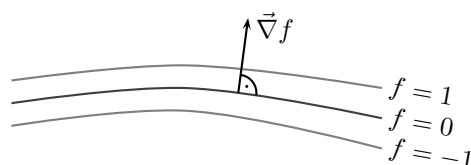
$$\begin{aligned} \delta \tilde{S} &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} \delta r_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} \delta \dot{r}_i + \sum_{\nu=1}^M \lambda_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial r_i} \delta r_i \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} + \sum_{\nu=1}^M \lambda_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial r_i} \right) \delta r_i = 0 \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} + \sum_{\nu} \lambda_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial r_i} \end{aligned} \quad (6.15)$$

In den meisten Fällen erhält man also eine Bewegungsgleichung von der Form:

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \sum_{\nu} \lambda_\nu \vec{\nabla} f_\nu \quad (6.16)$$

Dabei bezeichnet λ_ν die zu bestimmende Größe der Zwangskraft, $\vec{\nabla} f_\nu$ deren Richtung.

Man beachte:



$\vec{\nabla} f_\nu$ steht zwangsläufig senkrecht auf der Hyperfläche. Damit haben wir also das d'Alembertsche Prinzip bewiesen.

Zur konkreten Bestimmung der Multiplikatoren bilden wir nun:

$$\begin{aligned} \dot{f}_\nu &= \frac{\partial f_\nu}{\partial r_i} \frac{\partial r_i}{\partial t} = 0 \\ \ddot{f}_\nu &= \left(\frac{\partial^2 f_\nu}{\partial r_i \partial r_j} \frac{\partial r_i}{\partial t} + \frac{\partial f_\nu}{\partial r_i} \frac{\partial^2 r_i}{\partial t \partial r_j} \right) \frac{\partial r_j}{\partial t} \\ &= \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial r_i \partial r_j} \dot{r}_i \dot{r}_j + \frac{\partial f_\nu}{\partial r_i} \ddot{r}_i = 0 \\ \Rightarrow m_i \ddot{r}_i \frac{\partial f}{\partial r_i} &= -m_i \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial r_i \partial r_j} \dot{r}_i \dot{r}_j \end{aligned} \quad (6.17)$$

Andererseits multiplizieren wir die Lagrangeschen Gleichungen

$$m_i \ddot{r}_i = F_i + \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial r_i}$$

von rechts mit $\frac{\partial f_\nu}{\partial r_i}$:

$$\Rightarrow m_i \ddot{r}_i \frac{\partial f_\nu}{\partial r_i} = F_i \frac{\partial f_\nu}{\partial r_i} + \lambda_\mu \underbrace{\frac{\partial f_\mu}{\partial r_i} \frac{\partial f_\nu}{\partial r_i}}_{=: G_{\nu\mu}} \quad (6.18)$$

Setzen wir nun Gl. (6.17) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} -m_i \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial r_i \partial r_j} \dot{r}_i \dot{r}_j &= F_i \frac{\partial f_\nu}{\partial r_i} + \lambda_\mu G_{\nu\mu} \\ \Rightarrow \lambda_\mu &= G_{\mu\nu}^{-1} \left(-m_i \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial r_i \partial r_j} \dot{r}_i \dot{r}_j - \frac{\partial f_\nu}{\partial r_i} F_i \right) \end{aligned} \quad (6.19)$$

Hat man nur eine Zwangsbedingung, so ist $G = (\nabla f)^2$ eine Zahl, also $G^{-1} = \frac{1}{(\nabla f)^2}$.

Die Bewegungsgleichungen für ein Teilchen werden demnach zu:

$$m \ddot{r}_K = F_K + \underbrace{\frac{1}{(\nabla f)^2} \left(-m_i \dot{r}_i \dot{r}_j \frac{\partial^2 f}{\partial r_i \partial r_j} - \frac{\partial f}{\partial r_i} F_i \right)}_{=\lambda} \frac{\partial f}{\partial r_K} \quad (6.20)$$

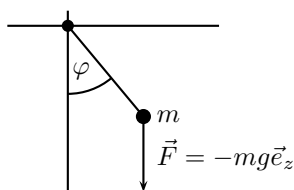
$$m \ddot{\vec{r}} = \underbrace{\vec{F} - \frac{(\vec{F} \cdot \vec{\nabla} f) \vec{\nabla} f}{(\nabla f)^2}}_{\text{Tangentialkraft}} - \underbrace{m \frac{\vec{\nabla} f}{(\nabla f)^2} \dot{r}_i \dot{r}_j \frac{\partial^2 f}{\partial r_i \partial r_j}}_{\text{Zentrifugalkraft}} \quad (6.21)$$

Beispiel: (Teilchen auf Kugeloberfläche)

Wir betrachten ein Teilchen auf einer Kugeloberfläche.

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= \vec{r}^2 - R^2 = 0 \\ \Rightarrow \vec{\nabla} f &= 2\vec{r} = 2r\vec{e}_r \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial r_i \partial r_j} &= 2\delta_{ij} \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} \text{also: } m \ddot{\vec{r}} &= \vec{F} - \frac{\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{F})}{R^2} - m \frac{\vec{r}}{R^2} \dot{r}^2 \\ &= \underbrace{\vec{F} - \vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \vec{F})}_{\text{Tangentialkraft}} - \underbrace{m \vec{e}_r \frac{v^2}{R}}_{\text{Fliehkraft}} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Spezialfall: Ebenes Pendel

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\vec{e}_z + mg\vec{e}_r(\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z) - m\vec{e}_r \frac{v^2}{R}$$

mit $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}$; $\vec{r} = R\vec{e}_r$

Für die linke Seite erhält man:

$$m\ddot{\vec{r}} = mR \begin{pmatrix} \ddot{\sin \varphi} \\ -\ddot{\cos \varphi} \end{pmatrix} = mR \begin{pmatrix} -(\sin \varphi)\dot{\varphi}^2 + (\cos \varphi)\ddot{\varphi} \\ (\cos \varphi)\dot{\varphi}^2 + (\sin \varphi)\ddot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

Für die rechte Seite erhält man:

$$\begin{aligned} \text{r.h.s.} &= mg \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \cos \varphi \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix} \right) - mR \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix} \dot{\varphi}^2 \\ &= mg \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \varphi \\ -\sin^2 \varphi \end{pmatrix} - mR \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix} \dot{\varphi}^2 \\ &= -mg \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \sin \varphi + mR \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \dot{\varphi}^2 \end{aligned} \quad (6.25)$$

Somit ergibt sich:

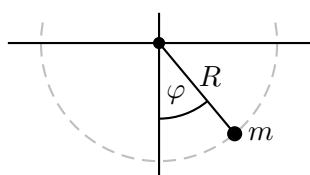
$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \ddot{\varphi} &= -mg \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \sin \varphi \\ \Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} = -\frac{g}{R} \sin \varphi} & \end{aligned} \quad (6.26)$$

Hierbei handelt es sich um eine schwierig zu lösende nichtlineare DGL.

6.1.2. Generalisierte Koordinaten

Die eleganteste Methode zur Berücksichtigung einer Zwangsbedingungen ist die Verwendung generalisierter Koordinaten, denn wir haben gezeigt, dass die Lagrangeschen Gleichungen unter Koordinatentransformation invariant sind (Abschnitt 6, Seite 64f.).

Beispiel: (Ebenes Pendel)



Wir betrachten das bereits bekannte Beispiel des ebenen Pendels.

$$V = mgR(1 - \cos \varphi) \quad ; \quad T = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2$$

Damit ist:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 - mgR(1 - \cos \varphi) \quad (6.27)$$

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= 0 \\ mR^2\ddot{\varphi} &= -mgR \sin \varphi \\ \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\varphi} = -\frac{g}{R} \sin \varphi} & \quad (6.28) \end{aligned}$$

Gleiches Resultat, aber viel schneller erreicht!

7. Hamilton-Mechanik

Die Lagrange-Mechanik ist mit Hilfe der Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ formuliert, welche von *Koordinaten* q_i und *Geschwindigkeiten* \dot{q}_i abhängt.

Im Gegensatz dazu wird die Hamilton¹-Mechanik mit einem Hamiltonian $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$ formuliert, der von den Koordinaten q_i und den generalisierten *Impulsen* p_i abhängt. Diese Formulierung ist, wie wir sehen werden, symmetrischer und bereitet die Quantenmechanik vor.

Zur Erinnerung: Die generalisierten Impulse sind die partiellen Ableitungen

$$p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}. \quad (7.1)$$

Für den Übergang Lagrange \rightarrow Hamilton brauchen wir eine Transformation

$$\{q_i, \dot{q}_i\} \rightarrow \{q_i, p_i\} \quad (7.2)$$

Dies ist eine sogenannte Legendre²-Transformation (siehe Anhang A.7).

Wie kann man die Legendre-Transformation auf die Lagrange-Mechanik anwenden? Dazu betrachten wir als $f(x)$ die Lagrange-Funktion eines freien Teilchens $\mathcal{L}(\dot{q})$. Dann ist die Steigung

$$m(\dot{q}) = \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = p \quad (7.3)$$

gerade der Impuls des Teilchens. Wir definieren nun die Legendre-Transformierte

$$g(p) = \mathcal{L}(\dot{q}(p)) - \dot{q}(p)p. \quad (7.4)$$

Aus historischen Gründen wird $-g(p)$ als Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(p) &:= -g(p) \\ &= \dot{q}(p)p - \mathcal{L}(\dot{q}(p)) \end{aligned} \quad (7.5)$$

bezeichnet. Wegen $x(m) = -\frac{dg(m)}{dm}$ (siehe oben) gilt

$$\dot{q}(p) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}. \quad (7.6)$$

¹Sir William Rowan Hamilton (* 4. August 1805 in Dublin; † 2. September 1865 bei Dunsink), irisch-englischer Mathematiker und Physiker.

²Adrien-Marie Legendre (* 18. September 1752 in Paris; † 10. Januar 1833 ebenda), französischer Mathematiker.

Für das freie Teilchen $\mathcal{L}(\dot{q}) = T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$ erhalten wir:

$$p(\dot{q}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad (7.7)$$

Die Hamilton-Funktion ist dann:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(p) &= \dot{q}(p)p - \mathcal{L}(\dot{q}(p)) \\ &= \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} = +\frac{p^2}{2m} \end{aligned} \quad (7.8)$$

$$\text{also: } \mathcal{H} = T \quad (7.9)$$

Beweis. Wir überprüfen $\dot{q}(p) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}$.

In der Tat ist

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} = \dot{q}. \quad \square$$

7.1. Legendre-Transformation mit mehreren Komponenten

Gegeben sei eine skalare Funktion $f(x_1, \dots, x_s) = f(\vec{x})$. Die „Steigung“ dieser Funktion ist der Gradient $\vec{m}(\vec{x}) = \vec{\nabla}_x f(\vec{x})$. Wir nehmen an, dass $\vec{m}(\vec{x})$ invertierbar ist, also $\vec{x}(\vec{m})$ existiert.

Wir definieren:

$$g(\vec{m}) = f(\vec{x}(\vec{m})) - \vec{x}(\vec{m}) \cdot \vec{m} \quad (7.10)$$

oder kurz

$$g = f - \sum_{s=1}^N x_s m_s \quad (7.11)$$

Dann gilt:

$$\vec{m}(\vec{x}) = \vec{\nabla}_x f \quad \text{also } m_s = \frac{\partial f}{\partial x_s} \quad (7.12)$$

$$\vec{x}(\vec{m}) = -\vec{\nabla}_m g \quad \text{also } x_s = -\frac{\partial g}{\partial m_s} \quad (7.13)$$

Beweis.

$$\frac{\partial g}{\partial m_s} = \sum_r \underbrace{\frac{\partial f(\vec{x}(\vec{m}))}{\partial x_r}}_{=m_r} \frac{\partial x_r}{\partial m_s} - x_s(\vec{m}) - \sum_r m_r \frac{\partial x_r}{\partial m_s} = -x_s(\vec{m})$$

$$\text{also: } \vec{x}(\vec{m}) = -\nabla_m g \quad \square$$

Merke:

Die Legendre-Transformation von $f(x_1, \dots, x_s)$ ist

$$g(m_1, \dots, m_s) = f - \sum_r x_r m_r, \quad (7.14)$$

wobei

$$m_s = \frac{\partial f}{\partial x_s}, \quad \text{„}\sum_r\text{“: jede Komponente nacheinander transformiert.}$$

$$\Rightarrow x_s = -\frac{\partial g}{\partial m_s} \quad (7.15)$$

Merke:

Im Hamilton-Formalismus ist $-\mathcal{H}(\{q_s\}, \{p_s\}, t)$ die Legendre-Transformierte von $\mathcal{L}(\{q_s\}, \{\dot{q}_s\}, t)$.

$$\boxed{-\mathcal{H} = \mathcal{L} - \sum_s p_s \dot{q}_s} \quad (7.16)$$

Dabei ist

$$p_s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_s}$$

der generalisierte Impuls. Als Legendre-Transformierte von \mathcal{L} erfüllt \mathcal{H} die Gleichung

$$\dot{q}_s = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_s}. \quad (7.17)$$

Wie sehen die transformierten Bewegungsgleichungen aus? Dazu bilden wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_s} &= \frac{\partial}{\partial q_s} \left(\sum_r p_r \dot{q}_r - \mathcal{L}(\{q\}, \{\dot{q}\}, t) \right) \\ &= \left(\sum_r \underbrace{p_r}_{=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_r}} \frac{\partial \dot{q}_r}{\partial q_s} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_s} - \left(\sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial \dot{q}_r}{\partial q_s} \right) \\ &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_s} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_s} = -\frac{d}{dt} p_s = \dot{p}_s \end{aligned} \quad (7.18)$$

Beide zusammen ergeben die kanonischen Bewegungsgleichungen:

$$\boxed{\dot{q}_s = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_s} \quad ; \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_s}} \quad (7.19)$$

Die ursprünglichen $3N$ Differentialgleichungen der Lagrange-Mechanik werden damit durch $6N$ Differentialgleichungen der Hamilton-Mechanik ersetzt. Die Paare (q_s, p_s) heißen konjugierte Größen. Bis auf Vorzeichen sind die Bewegungsgleichungen symmetrisch unter $q_s \leftrightarrow p_s$. Koordinaten und Impulse sind in der Hamilton-Formulierung gleichberechtigt.

Satz:

Wenn \mathcal{L} nicht explizit von der Zeit abhängt, ist \mathcal{H} eine Erhaltungsgröße.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \underbrace{\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_s} \dot{p}_s}_{=-\dot{p}_s \dot{q}_s + \dot{q}_s \dot{p}_s = 0} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (7.20)$$

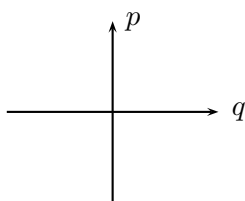
Beispiel: (Harmonischer Oszillator)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 \quad ; \quad p = m\dot{q} \\ \mathcal{H} &= p\dot{q} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2 \\ &= +\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2 \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = T + V \end{aligned} \quad (7.21)$$

(Faustregel: $\mathcal{H} = T + V = \text{Gesamtenergie}$)

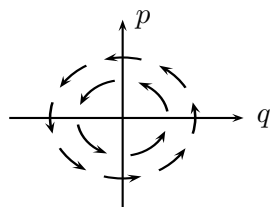
kanonische Gleichungen:
$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q} = -kq \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \ddot{q} = -\frac{k}{m}q \quad (7.22)$$

7.2. Phasenraum

Der von generalisierten Koordinaten $\{q_s\}$ und den generalisierten Impulsen $\{p_s\}$ aufgespannte $6N$ -dimensionale Raum heißt Phasenraum. Im Beispiel des harmonischen Oszillators ist dieser Raum zweidimensional.

Die kanonischen Bewegungsgleichungen legen ein Flussfeld fest.



$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} & 1/m \\ -k & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

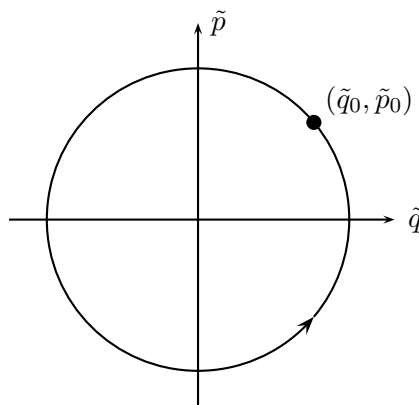
Durch Reskalierung $\tilde{q} = \lambda q$, $\tilde{p} = \lambda^{-1} p$, $\tilde{t} = \mu t$ erhalten wir $\begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\lambda^{-2}/m \\ -k\mu\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{pmatrix}$. λ , μ können so gewählt werden, dass

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{p}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}}_G \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} \quad \text{mit } G^2 = -1 \text{ ist.}$$

Die Lösung lautet

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} &= e^{iGt} \begin{pmatrix} \tilde{q}_0 \\ \tilde{p}_0 \end{pmatrix} \\ &= \cos t \begin{pmatrix} \tilde{q}_0 \\ \tilde{p}_0 \end{pmatrix} + G \sin t \begin{pmatrix} \tilde{q}_0 \\ \tilde{p}_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.24)$$

und beschreibt eine Kreisbahn im Phasenraum.



Ein kleines Volumenelement (hier Flächenelement) $dV = d\tilde{p} d\tilde{q}$ bleibt während der Zeitentwicklung erhalten. Die Erhaltung des Phasenraumvolumens gilt auch bei komplizierteren Hamiltonians, wie der weiter unten zu besprechende Satz von Liouville³ zeigen wird.

7.2.1. Kanonische Transformationen

Im Lagrange-Formalismus sind die Lagrangeschen Gleichungen invariant unter Transformationen

$$\{r_1, \dots, r_{3N}\} \rightarrow \{Q_1, \dots, Q_{3N}\}, \quad (7.25)$$

d. h. unter $3N$ Abbildungen der Koordinaten. Durch Vorgabe dieser Abbildungen ist automatisch die Transformation der Geschwindigkeiten mit vorgegeben, denn man bekommt diese durch zeitliche Ableitung von Gl. (7.25):

$$\{\dot{r}_1, \dots, \dot{r}_{3N}\} \rightarrow \{\dot{Q}_1, \dots, \dot{Q}_{3N}\} \quad (7.26)$$

³Joseph Liouville (* 24. März 1809 in Saint-Omer, † 8. September 1882 in Paris), französischer Mathematiker.

In der Lagrange-Theorie sind die q_s und \dot{q}_s nämlich nicht unabhängig, sondern durch Zeitableitung miteinander verknüpft.

Im Hamilton-Formalismus dagegen werden Koordinaten und Impulse als *unabhängig* betrachtet. Wir betrachten deshalb eine **Punkttransformation** des Phasenraums

$$\{q_1, \dots, q_{3N}, p_1, \dots, p_{3N}\} \rightarrow \{Q_1, \dots, Q_{3N}, P_1, \dots, P_{3N}\} \quad (7.27)$$

und fragen uns, unter welchen Bedingungen die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen invariant sind. Da wir $6N$ statt $3N$ Abbildungsfunktionen vorgeben, ist es nicht überraschend, dass nicht alle Punkttransformationen Forminvarianz mit sich bringen, sondern dass Forminvarianz an bestimmte Bedingungen geknüpft ist. Phasenraumtransformationen, unter denen die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen forminvariant sind, heißen **kanonische Transformationen**, wenn also gilt:

$$\dot{Q}_s = \frac{\partial \widetilde{\mathcal{H}}}{\partial P_s} \quad ; \quad \dot{P}_s = \frac{\partial \widetilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_s}, \quad (7.28)$$

wobei $\widetilde{\mathcal{H}}(P_s, Q_s, t) = \mathcal{H}(p_s, q_s, t)$ ist.

Beispiel: (kanonische Transformation)

Gegeben:

$$Q_s := -p_s \quad ; \quad P_s := +q_s$$

Somit:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{\partial \widetilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_s} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(-p_s)} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_s} = -\dot{q}_s = -\dot{P}_s \\ \frac{\partial \widetilde{\mathcal{H}}}{\partial P_s} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_s} = \dot{p}_s = +\dot{Q}_s \end{aligned} \quad (7.29)$$

Man kann also Koordinaten und Impulse (bis auf ein Minuszeichen) vertauschen. Spätestens hier sieht man, dass $\{p_s\}$ und $\{q_s\}$ eine gleichberechtigte Rolle spielen.

7.2.2. Erzeugende Funktion

Wir betrachten das Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(\{q_s\}, \{\dot{q}_s\}, t) = 0. \quad (7.30)$$

Nach der Transformation muss gelten, dass

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \widetilde{\mathcal{L}}(\{Q_s\}, \{\dot{Q}_s\}, t) = 0. \quad (7.31)$$

Dies gilt für *alle* Start- und Endpunkte:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt (\mathcal{L} - \widetilde{\mathcal{L}}) = 0 \quad (7.32)$$

Folglich kann $\mathcal{L} - \widetilde{\mathcal{L}}$ nur die totale Zeitableitung einer Funktion S sein:

$$\mathcal{L} - \widetilde{\mathcal{L}} = \frac{d}{dt} S \quad (7.33)$$

S wird auch Erzeugende genannt, da sie die Transformation vollständig festlegt. Wir nehmen an, dass S von q_s und Q_s abhängt⁴:

$$p_s \dot{q}_s - \mathcal{H} - P_s \dot{Q}_s + \widetilde{\mathcal{H}} = \frac{\partial S}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial S}{\partial Q_s} \dot{Q}_s \quad (7.34)$$

Ein Vergleich auf beiden Seiten ergibt

$$p_s = \frac{\partial S}{\partial q_s} \quad ; \quad P_s = -\frac{\partial S}{\partial Q_s} \quad ; \quad \widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}. \quad (7.35)$$

Beispiel:

Gegeben:

$$S = q_s Q_s$$

Somit:

$$\Rightarrow \quad p_s = Q_s \quad , \quad P_s = -q_s \quad (\text{siehe oben})$$

Beispiel: (harmonischer Oszillator)

Gegeben:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \quad , \quad S = \frac{1}{2} m \omega q^2 \cot Q$$

Somit:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad p &= \frac{\partial S}{\partial q} = m \omega q \cot Q & \Bigg| & \Rightarrow \quad q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \\ P &= -\frac{\partial S}{\partial Q} = \frac{1}{2} m \omega q^2 \frac{1}{\sin^2 Q} & & p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \widetilde{\mathcal{H}}(P, Q) = \omega P \quad (7.36)$$

Kanonische Gleichungen:

$$\dot{P} = -\frac{\partial \widetilde{\mathcal{H}}}{\partial Q} = 0 \quad \quad P = \text{const.} = \frac{E}{\omega} \quad (7.37)$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial \widetilde{\mathcal{H}}}{\partial P} = \omega \quad \quad Q = \omega t + \varphi_0 \quad (7.38)$$

Q entspricht dem Winkel im Phasenraum.

⁴ S kann auch von anderen Komponenten abhängen, z. B. von $\{p_s\}\{Q_s\}$, $\{q_s\}\{P_s\}$, $\{p_s\}\{P_s\}$, und von der Zeit.

Anhang

A. Mathematische Ergänzung

A.1. Definition eines Vektorraums

- Kommutative Gruppe ‚+‘ bezüglich Addition von Vektoren
- Multiplikation $\vec{r} \rightarrow \lambda\vec{r}$ mit einem Körperelement λ (hier $\lambda \in \mathbb{R}$)
- Verträglichkeitsgesetze (Linearität):

$$\begin{aligned} 1 \cdot \vec{r} &= \vec{r} & \lambda(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) &= \lambda\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2 & (A.1) \\ \lambda(\mu\vec{r}) &= (\lambda\mu)\vec{r} & (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{r} &= \lambda_1\vec{r} + \lambda_2\vec{r} \end{aligned}$$

- Dimension d : maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren

A.1.1. Metrik

Die Metrik $d : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ ist eine Abstandsfunktion, d. h. eine Abbildung zweier Vektoren in den Körper (hier $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) mit folgenden Eigenschaften:

- Positivität:

$$d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \geq 0 \quad ; \quad d(\vec{r}_1, \vec{r}_1) = 0 \quad (A.2)$$

- Symmetrie:

$$d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = d(\vec{r}_2, \vec{r}_1) \quad (A.3)$$

- Dreiecksungleichung:

$$d(\vec{r}_1, \vec{r}_3) \leq d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) + d(\vec{r}_2, \vec{r}_3) \quad (A.4)$$

A.1.2. Norm

Die Norm $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ stellt den „Betrag des Vektors“ dar, d. h., sie ist eine Abbildung eines Vektors in den Körper. Sie besitzt die folgenden Eigenschaften:

- Positivität:

$$\|\vec{r}\| \geq 0 \quad ; \quad \|\vec{r}\| = 0 \iff \vec{r} = \vec{0} \quad (A.5)$$

- Dreiecksungleichung:

$$\|\vec{r}_1 + \vec{r}_2\| \leq \|\vec{r}_1\| + \|\vec{r}_2\| \quad (\text{A.6})$$

- Homogenität:

$$\|\lambda \vec{a}\| = \lambda \|\vec{a}\| \quad (\text{A.7})$$

- Jede Norm induziert eine kanonische Metrik (jedoch nicht immer umgekehrt):

$$d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) := \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\| \quad (\text{A.8})$$

A.1.3. Skalarprodukt

Das Skalarprodukt $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$ ist eine Abbildung $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ zweier Vektoren \vec{r}_1, \vec{r}_2 in den Körper (hier $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) mit folgenden Eigenschaften:

- Positivität:

$$\vec{r} \cdot \vec{r} \geq 0 \quad ; \quad \vec{r} \cdot \vec{r} = 0 \iff \vec{r} = \vec{0} \quad (\text{A.9})$$

- Symmetrie:

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1 \quad (\text{A.10})$$

- Bilinearität:

$$\vec{r}_1 \cdot (\alpha \vec{r}_2 + \beta \vec{r}_3) = \alpha \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 + \beta \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3 \quad (\text{A.11})$$

- Jedes Skalarprodukt induziert eine Norm $\|\vec{r}\| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$ und damit eine Metrik:

$$d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sqrt{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} \quad (\text{A.12})$$

A.2. Herleitung der Rotationsmatrix

Wir schreiben:

$$R = \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \quad (\text{A.13})$$

Dann ist

$$R^T = \exp(A^T) \quad \text{und} \quad \mathbb{1} = \exp(0). \quad (\text{A.14})$$

Eingesetzt in die Bedingung für lineare Abbildungen, welche das Skalarprodukt unverändert lassen (Gl. (1.8) auf Seite 6), ergibt sich:

$$e^{A^T} e^A = e^0. \quad (\text{A.15})$$

Wegen $AA^T = A^T A$ folgt

$$A^T + A = 0. \quad (\text{A.16})$$

Für jede beliebige *antisymmetrische* Matrix A ist $\exp(A)$ also eine Rotationsmatrix.

Beispiel:

Die Darstellung einer Rotation um die z-Achse erhält man folgendermaßen.

$$\begin{aligned}
 A &= \varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & A^2 &= -\varphi^2 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \\
 A^3 &= -\varphi^3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & A^4 &= \varphi^4 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \\
 \exp(A) &= \mathbb{1} + \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \right) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad + \left(-\frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \right) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

A.3. Skalare, Vektoren und Tensoren

- Ein Skalar ist eine Größe („Zahl“), die unter orthogonalen Transformationen (Rotationen) invariant ist, also keine Richtung repräsentiert.

Beispiele:

- Temperatur
- Druck
- $\vec{x} \cdot \vec{y}$

Gegenbeispiele:

- \vec{x}
- $\frac{d}{dx}$
- elektr. Feld

Wichtige Anmerkung:

In der Newtonschen Physik ist die Zeit t (und damit auch $\frac{d}{dt}$) eine skalare Größe. In der relativistischen Mechanik dagegen ist t eine Vektorkomponente — hier muss man die Eigenzeit τ nehmen.

- Ein Vektor ist eine Größe, die sich unter orthogonalen Transformationen wie ein Ortsvektor transformiert. Ein Vektor kann durch Komponenten mit einem Index dargestellt werden und repräsentiert eine physikalische Richtung.

Beispiele:

- Ortsvektor \vec{r}
- Geschwindigkeit \vec{v}
- Beschleunigung \vec{a}
- elektr. Feld \vec{E}

Gegenbeispiele:

- Druck
- Temperatur
- Lottozahl

- Ein Tensor n -ter Stufe ist eine Größe mit n Indices, die sich *in jedem* Index wie ein Vektor transformiert.

Spezialfälle:

- $n = 0$: Skalar
- $n = 1$: Vektor
- $n = 2$: Matrix

A.4. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

Man unterscheidet:

$$\begin{array}{lll} \text{Skalare Funktionen:} & \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} & \vec{x} \rightarrow f(\vec{x}) \\ \text{Vektorielle Funktionen:} & \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n & \vec{x} \rightarrow \vec{g}(\vec{x}) \end{array}$$

Beispiele:

- Der Luftdruck $P(\vec{x})$ ist eine skalare Funktion.
- Die Erdbeschleunigung $\vec{g}(\vec{x})$ ist ein Vektorfeld.

A.4.1. Ableitungen

Die erste Ableitung ist eine lineare Abbildung, welche $f(\vec{x})$ (bzw. $\vec{g}(\vec{x})$) im Punkt \vec{x} approximiert und in der ersten Ordnung der Taylor-Entwicklung auftritt:

$$f(\vec{x} + \Delta\vec{x}) = f(\vec{x}) + \overbrace{f'(\vec{x}) \cdot \Delta\vec{x}}^{\text{Skalar}} + \dots \tag{A.17}$$

Wir schreiben auch:

$$f'(\vec{x}) = \vec{\nabla} f(\vec{x}) = \text{grad } f(\vec{x}) \tag{A.18}$$

In Komponenten:

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} \tag{A.19}$$

Dabei ist $\frac{\partial}{\partial x} =: \partial_x$ die partielle Ableitung (deren Existenz wir hier voraussetzen):

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

Merke:

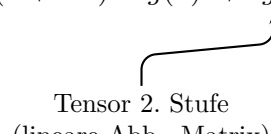
Der Gradient

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix}$$

ist ein Vektor, da er sich wie ein Ortsvektor transformiert (ohne Beweis).

Die Taylor-Entwicklung eines Vektorfeldes lautet:

$$\vec{g}(\vec{x} + \Delta\vec{x}) = \vec{g}(\vec{x}) + \overbrace{\vec{g}'(\vec{x}) \Delta\vec{x}}^{\text{Vektor}} + \dots \tag{A.20}$$



In Komponenten:

$$g'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_x}{\partial x} & \frac{\partial g_x}{\partial y} & \frac{\partial g_x}{\partial z} \\ \frac{\partial g_y}{\partial x} & \frac{\partial g_y}{\partial y} & \frac{\partial g_y}{\partial z} \\ \frac{\partial g_z}{\partial x} & \frac{\partial g_z}{\partial y} & \frac{\partial g_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{A.21}$$

Diesen Ableitungstensor bezeichnet man auch als Jacobi¹-Matrix oder totale Ableitung.

Im n -dimensionalen euklidischen Vektorraum kann man schreiben: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$f(\vec{x} + \Delta\vec{x}) = f(\vec{x}) + \underbrace{\left[\partial_j f(\vec{x}) \right] \Delta x_j}_{\lfloor \sum_{j=1 \dots n} \rfloor} + \dots \tag{A.22}$$

$$g_i(\vec{x} + \Delta\vec{x}) = g_i(\vec{x}) + \underbrace{\left[\partial_j g_i(\vec{x}) \right] \Delta x_j}_{\lfloor \sum_{j=1 \dots n} \rfloor} + \dots \tag{A.23}$$

¹Carl Gustav Jacob Jacobi (* 10. Dezember 1804 in Potsdam, † 18. Februar 1851 in Berlin), deutscher Mathematiker.

Anmerkung: (Höhere Ableitungen)

$$\begin{aligned}
 f(\vec{x} + \Delta\vec{x}) &= f(\vec{x}) + \underbrace{(\partial_j f(\vec{x})) \Delta x_j}_{\text{1. Ordnung}} + \frac{1}{2} \underbrace{(\partial_j \partial_k f(\vec{x})) \Delta x_j \Delta x_k}_{\text{2. Ordnung}} \\
 &+ \frac{1}{6} \underbrace{(\partial_j \partial_k \partial_l f(\vec{x})) \Delta x_j \Delta x_k \Delta x_l}_{\text{3. Ordnung}} + \dots
 \end{aligned} \tag{A.24}$$

$$\begin{aligned}
 g_i(\vec{x} + \Delta\vec{x}) &= g_i(\vec{x}) + \underbrace{(\partial_j g_i(\vec{x})) \Delta x_j}_{\text{1. Ordnung}} + \frac{1}{2} \underbrace{(\partial_j \partial_k g_i(\vec{x})) \Delta x_j \Delta x_k}_{\text{2. Ordnung}} \\
 &+ \frac{1}{6} \underbrace{(\partial_j \partial_k \partial_l g_i(\vec{x})) \Delta x_j \Delta x_k \Delta x_l}_{\text{3. Ordnung}} + \dots \quad (\text{komponentenweise})
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

Differenzieren entlang einer parametrisierten Bahn $\vec{x}(u)$ (oftmals $u = t$):

- Totales Differential:

$$\underbrace{df = (\partial_i f) dx_i}_{\Sigma} \tag{A.26}$$

- Totale Ableitung:

$$\underbrace{\frac{df}{du} = (\partial_i f) \frac{dx_i}{du}}_{\Sigma} \leftarrow \text{„Kettenregel“} \tag{A.27}$$

Im \mathbb{R}^3 schreibt man dies aus als:

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{du} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{du} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{du} \\
 &= (\vec{\nabla} f) \cdot \left(\frac{d\vec{x}}{du} \right)
 \end{aligned} \tag{A.28}$$

Bei vektorwertigen Funktionen wird jede Komponente auf die beschriebene Weise differenziert.

A.5. Partielle Ableitungen im Minkowski-Raum

Wir kennen bereits:

- Kontravariante („normale“) Darstellung eines Vierervektors mit Index oben:

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{A.29}$$

- Kovariante Darstellung (Index unten):

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad (\text{A.30})$$

- Metrischer Tensor des Minkowski-Raums:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}_{\mu\nu} \quad (\text{A.31})$$

- Metrischer Tensor als Maschine zum Heben und Senken von Indices:

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad ; \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad (\text{A.32})$$

$$\Rightarrow g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_\nu^\rho = \begin{cases} 1 & \rho = \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

- Skalarprodukt:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^\mu y_\mu = x_\mu y^\mu \quad (\text{A.34})$$

Im \mathbb{R}^3 hatten wir den Gradienten eingeführt:

$$\vec{\nabla} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.35})$$

Wir hatten argumentiert, dass sich $\vec{\nabla}$ wie ein Vektor transformiert:

$$\vec{\nabla}(\vec{x} \cdot \vec{a}) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} (x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{a} \quad (\text{A.36})$$

↑ Skalar ↑ Vektor

$\Rightarrow \vec{\nabla}$ muss Vektor sein.

Im Minkowski-Raum verhält es sich ähnlich:

$$\nabla(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix} (x^0 a_0 + x^1 a_1 + x^2 a_2 + x^3 a_3) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \mathbf{a} \quad (\text{A.37})$$

∇ transformiert sich also auch hier wie ein Vektor. Allerdings gibt es eine Besonderheit: Partielle Ableitungen nach kontravarianten Indices transformieren sich kovariant und umgekehrt.

Wir schreiben deshalb:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{l} \text{Vektor} \\ \text{Index unten} \end{array} & \longrightarrow & \partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} & \longleftarrow & \begin{array}{l} \text{„Ableitung nach“} \\ \text{Index oben} \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} \text{Vektor} \\ \text{Index oben} \end{array} & \longrightarrow & \partial^\mu := \frac{\partial}{\partial x_\mu} & \longleftarrow & \begin{array}{l} \text{„Ableitung nach“} \\ \text{Index unten} \end{array} \end{array}$$

Mit der Notation ∂^μ , ∂_μ ist dann der gewöhnliche Formalismus anwendbar, z. B.:

$$\begin{aligned} (\nabla f)^\mu &= \partial^\mu f \\ \nabla \cdot \mathbf{g} &= \partial^\mu g_\mu = \partial_\mu g^\mu \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Übrigens: Ein Vektor skalar multipliziert mit sich selbst ergibt einen Skalar. Im \mathbb{R}^3 ist zum Beispiel der Laplace²-Operator

$$\Delta := \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{A.39})$$

ein Skalar. Analog ist der d'Alembert³-Operator (auch „Quabla“ genannt)

$$\square := \nabla \cdot \nabla = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{A.40})$$

ein Skalar im Minkowski-Raum.

²Pierre Simon Marquis de Laplace (* 23. März oder 28. März 1749 in Beaumont-en-Auge; † 5. März 1827 in Paris), französischer Mathematiker und Astronom.

³Jean-Baptiste le Rond, genannt d'Alembert (* 17. November 1717 in Paris; † 29. Oktober 1783 in Paris), einer der bedeutendsten Mathematiker und Physiker des 18. Jahrhunderts und Philosoph der Aufklärung.

A.6. Wiederholung: Lagrange-Multiplikatoren

Gesucht sei das Extremum einer skalaren Funktion $g(\vec{r})$ unter den Nebenbedingungen $f_\nu(\vec{r}) = 0$, $\nu = 1..M$.

- Ohne Nebenbedingungen hätten wir N Gleichungen

$$\frac{\partial g(\vec{r})}{\partial r_i} = 0 \quad \text{mit } i = 1..N$$

für N Unbekannte $\vec{r} = (r_1, \dots, r_N)$. Dies ist lösbar.

- Mit Nebenbedingungen hätten wir $N + M$ Gleichungen für N Unbekannte. Dies würde zu einem überbestimmten Gleichungssystem führen.

Mit folgendem „Trick“ können wir uns behelfen. Wir führen zusätzliche Freiheitsgrade $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ ein, die sogenannten Lagrangeschen Multiplikatoren:

$$\tilde{g}(\vec{r}) := g(\vec{r}) + \sum_{\nu=1}^M \lambda_\nu f_\nu(\vec{r}) \quad (\text{A.41})$$

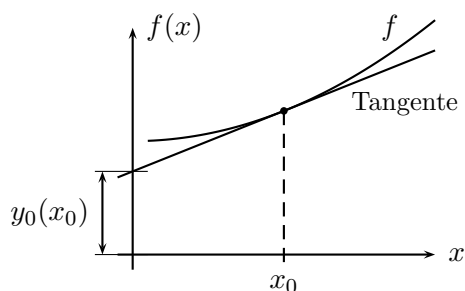
Zusammen mit den Nebenbedingungen hat man $N + M$ Gleichungen

$$\frac{\partial \tilde{g}(\vec{r})}{\partial r_i} = 0 \quad ; \quad f_\nu(\vec{r}) = 0 \quad (\text{A.42})$$

für $N + M$ Unbekannte. Außerdem ist klar, dass g und \tilde{g} auf der Hyperfläche $f_\nu(\vec{r}) = 0$, $\nu = 1..M$, identische Extrema haben.

A.7. Crashkurs: Legendre-Transformation

Betrachte eine Funktion $f(x)$. Für jeden Punkt x_0 hat diese Funktion eine Tangente, welche (sofern ihre Steigung nicht unendlich ist) die y -Achse in der Höhe $y_0(x_0)$ schneidet.



Bezeichne $m(x_0)$ die Steigung der gegebenen Funktion an der Stelle x_0 . Dann gilt:

$$y_0(x_0) = f(x_0) - x_0 \cdot m(x_0) \quad (\text{A.43})$$

$$\text{(mit } m(x_0) = f'(x_0)\text{)} \quad (\text{A.44})$$

Wir nehmen nun an, dass $m(x)$ invertierbar ist (z. B. bei konvexen Kurven ist das der Fall), d. h., es gibt eine Funktion $x(m)$. Wir definieren:

$$\begin{aligned} g(m) &:= y_0(x(m)) \\ &= f(x(m)) - x(m) \cdot m \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

$g(m)$ heißt Legendre-Transformierte von $f(x)$. Kurzschreibweise: „ $g = f - xm$ “.

Eigenschaften

- Es ist

$$\boxed{m(x) = \frac{df(x)}{dx}}. \quad (\text{A.46})$$

Dies ist die Definition der Steigung.

- Ferner ist

$$\boxed{x(m) = -\frac{dg(m)}{dm}}. \quad (\text{A.47})$$

Das beweist man wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dg(m)}{dm} &= \underbrace{\frac{\partial f(x(m))}{\partial x}}_{=m(x)} \frac{dx(m)}{dm} - x(m) - m \frac{dx(m)}{dm} \\ &= -x(m) \end{aligned}$$

Beispiele

1. Sei $f(x) = x^2$, dann ist:

$$\begin{aligned} m(x) &= 2x \quad \text{also: } x(m) = \frac{m}{2} \\ \Rightarrow g(m) &= -\frac{m^2}{4} \end{aligned}$$

2. Sei $f(x) = e^x$, dann ist:

$$\begin{aligned} m(x) &= e^x \quad \text{also: } x(m) = \ln m \\ \Rightarrow g(m) &= m(1 - \ln m) \end{aligned}$$